

möglicherweise vergeblich abgearbeitet haben? Vermutlich dürften dies doch wohl eher die (in mathematischer Hinsicht) „Intelligenteren“, „Besseren“, „Fähigeren“ gewesen sein (allerdings vielleicht auch in sozialer Hinsicht die Ungeschickteren und Unangepassteren), die nun „zu Unrecht“ Punkte verloren haben. Insofern man die Abiturprüfung nicht nur als Initiationsritual, als Gratifikation für Wohlverhalten oder als begünstigenden Verwaltungsakt versteht, sondern auch – im Sinne pädagogisch-psychologischer Diagnostik – als Leistungs- oder Fähigkeitsmessung, nicht zuletzt orientiert an Gütekriterien wie inhaltlicher und prognostischer Validität sowie Fairness, ist es ein großes Problem, wenn gerade die besonders leistungsfähigen Kandidaten schlechtere Lösungswahrscheinlichkeiten haben: Negative Trennschärfen (in der Begrifflichkeit der klassischen Testtheorie) oder nicht monotone

Item-Charakteristiken (in der Begrifflichkeit der probabilistischen Testtheorie) machen aus dieser Perspektive Testitems untauglich.

Literatur

Diepgen, R. (1987): Sequentielles Testen – auch didaktisch vielleicht eine gute Alternative. *Stochastik in der Schule* 7 (2), 9–25

Diepgen, R., Kuypers, W., Rüdiger, K. (1989): *Mathematik Sekundarstufe II Stochastik Grundkurs*. Düsseldorf: Cornelsen

Anschrift des Verfassers

Dr. Raphael Diepgen
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Psychologie
Universitätsstr. 150
44780 Bochum
raphael.diepgen@rub.de

Messung von Sterndurchmessern – Ein klassisches Beispiel zur Photonenstatistik

AXEL DONGES, ISNY IM ALLGÄU

Zusammenfassung: Die experimentelle Bestimmung von Sterndurchmessern ist mit einfachen geometrisch-optischen Mitteln nicht möglich. R. Hanbury-Brown und R. Q. Twiss haben bereits 1955/56 ein Messverfahren zur Bestimmung von Sterndurchmessern entwickelt, das auf einer statistischen Analyse des Sternenlichts beruht. In diesem Beitrag werden – für den Schulunterricht stark vereinfacht – die physikalischen Grundlagen dieses Messverfahrens erläutert.

1 Einleitung

Beobachtet man mit einem Fernrohr einen weit entfernten Stern, so kann dieser mit dem Fernrohr nicht aufgelöst werden. Statt des Sterns sieht ein Beobachter das wesentlich größere Beugungsscheibchen des Sterns. Der Durchmesser des Beugungsscheibchens wird u. a. durch die Apertur des Fernrohrs festgelegt. Er hat nichts mit dem Durchmesser des Sterns zu tun. Die Bestimmung des Sterndurchmessers ist offensichtlich nicht ohne Weiteres möglich.

Dieses interessante messtechnische Problem wurde erstmals von A. A. Michelson gelöst. Er baute auf Vorschlag von A. H. L. Fizeau ein *Sterninterferometer*.

Das Sterninterferometer arbeitet – stark vereinfacht – nach folgendem Prinzip: Mit dem Licht des Sterns wird ein Doppelspalt beleuchtet und das entstehende Beugungsmuster beobachtet (siehe Abbildung 1)¹. Der Abstand $2b$ der beiden Spalte, der zunächst sehr klein gewählt wird, wird immer mehr vergrößert, bis das typische Interferenzmuster des Doppelspalts gerade verschwindet. Der Abstand der beiden Spalte ist dann gerade $2b_{\max}$, die sogenannte transversale Kohärenzlänge des Sternenlichts am Ort der Erde. Es gilt dann die einfache Beziehung (Donges 1990, S. 96)

$$2a \approx \frac{\lambda R}{2b_{\max}} \quad (1)$$

Hierbei bedeuten $2a$: Sterndurchmesser, λ : Wellenlänge des (gefilterten) Sternenlichts und R : Abstand Stern-Erde. Mit seinem Sterninterferometer hat Michelson Sterndurchmesser, genauer Sehwinkel

$$\varepsilon = \frac{2a}{R}, \quad (2)$$

bis herab zu 0,02 Bogensekunden gemessen.

¹ Tatsächlich wird das Sternenlicht mit zwei um einige Meter entfernte Spiegel in ein Fernrohr eingespiegelt und das Interferenzmuster mit dem Fernrohr beobachtet.

R. Hanbury-Brown und R. Q. Twiss (1956) haben das von Michelson gebaute Interferometer weiterentwickelt und konnten die Messgenauigkeit dadurch wesentlich steigern ($5 \cdot 10^{-4}$ Bogensekunden). Dies erreichten sie dadurch, dass sie die beiden Spalte durch Photomultiplier ersetzten und photonenstatistische Gesetzmäßigkeiten nutzten.

Bevor das Verfahren von Hanbury-Brown und Twiss näher beschrieben wird, werden zunächst die physikalischen, photonenstatistischen Grundlagen diskutiert.

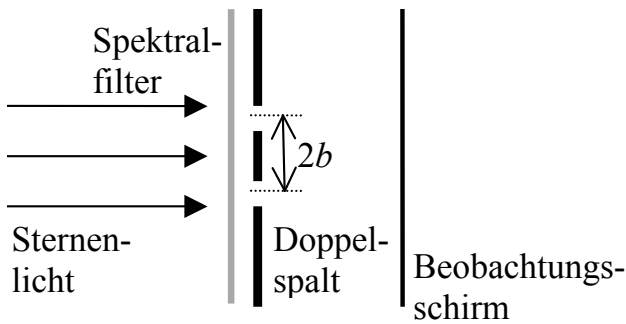


Abb. 1: Schematischer Aufbau des Doppelspalt-experiments

2 Bose-Einstein-Verteilung

Herleitung

Ein Mode möge sich im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung (Temperatur T) befinden. Die Thermodynamik lehrt, dass die verschiedenen Energiezustände des Modes dann entsprechend einer Boltzmann-Verteilung besetzt sind:

$$w(n) = C e^{-\frac{W_n}{kT}} \quad (3)$$

$w(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mode mit n Photonen besetzt ist, k die Boltzmann-Konstante und

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) hf \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

die Energie des mit n Photonen besetzten Modes (h : Plancksches Wirkungsquantum, f : Frequenz der Photonen). Die Konstante C wird durch die Normierungsbedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} w(n) = 1 \quad (5)$$

festgelegt. Nach kurzer Rechnung (Donges 1990, S. 181–182) folgt

$$C = e^{\frac{hf}{2kT}} \left(1 - e^{-\frac{hf}{kT}}\right) \quad (6)$$

und damit schließlich

$$w(n) = \left(1 - e^{-\frac{hf}{kT}}\right) e^{-\frac{nhf}{kT}} \quad (7)$$

Im Mittel ist ein Mode mit $\langle n \rangle$ Photonen besetzt. Der Mittelwert von n berechnet sich mit der Definitionsgleichung

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)n \quad (8)$$

zu

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad (9)$$

(Donges 1990, S. 182–183). Wird Gleichung (9) nach $\frac{hf}{kT}$ aufgelöst und in Gleichung (7) eingesetzt, so ergibt sich die sogenannte *Bose-Einstein-Verteilung* (Bergmann-Schaefer, 1978, S. 806)

$$w(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(\langle n \rangle + 1)^{n+1}} \quad (10)$$

2.2 Klumpenbildung

Das Ergebnis ist wie folgt zu interpretieren: Der thermisch besetzte Mode ist bei der Temperatur T – entsprechend Gleichung (9) – im Mittel mit $\langle n \rangle$ Photonen besetzt. Bei einer Einzelmessung der Photonenzahl werden allerdings immer nur ganzzahlige Photonenzahlen

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

beobachtet. Dabei ist die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Photonenzahl n gemessen wird, durch die Bose-Einstein-Verteilung (10) gegeben. Danach ist der Mode am wahrscheinlichsten unbesetzt ($n = 0$) und mit wachsendem n nimmt die Wahrscheinlichkeit $w(n)$ ab.

Beispiel: Für $\langle n \rangle = 2$ berechnen gilt $w(0) = 33\%$; $w(1) = 22\%$; $w(2) = 15\%$; $w(3) = 10\%$

Dieses Ergebnis ist überraschend: Würden sich Photonen wie klassische Teilchen verhalten, so hätte man das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung in der Nähe von $\langle n \rangle$ erwartet. Da mit größter Wahrscheinlichkeit bei einer Einzelmessung kein Photon nachgewiesen wird, müssen in wenigen Messungen relativ viele Photonen festgestellt werden. Photonen treten offenbar, wenn überhaupt, gehäuft in Gruppen auf. Diese Eigenschaft der Photonen wird als *Klumpenbildung* bezeichnet.

Mittleres Schwankungsquadrat

Die Photonenzahl n schwankt zwischen den einzelnen Messungen. Diese Schwankungen werden durch das so genannte *mittlere Schwankungsquadrat* charakterisiert:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2. \quad (12)$$

Mit Gleichung (8) und

$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w(n)n^2 \quad (13)$$

folgt nach kurzer Rechnung (Donges 1990, S. 183–184)

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (14)$$

Das *relative mittlere Schwankungsquadrat* ist somit stets größer als Eins:

$$\frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{1}{\langle n \rangle}. \quad (15)$$

Experimentell macht sich dies in starken Intensitätsfluktuationen bemerkbar.

3 Messung über mehrere Moden

Die gerade diskutierte Bose-Einstein-Verteilung gilt nur für kohärentes thermisches Licht. Anders ausgedrückt: Die Bose-Einstein-Verteilung setzt Photonen, die bezüglich Ausbreitungsrichtung, Frequenz und Polarisationsrichtung ununterscheidbar sind, voraus.

Werden bei einer Messung Photonen aus unterschiedlichen Moden erfasst (d. h. Photonen mit unterschiedlichen Richtungen, Frequenzen und Polarisationsrichtungen), ändert sich die zugehörige Verteilungsfunktion. Dies ist anschaulich sofort klar: Misst man beispielsweise die Anzahl der von der Sonne kommenden Photonen über einen langen Zeitraum (z. B. ein Jahr), so wird man wohl kaum mit größter Wahrscheinlichkeit kein Photon ($n = 0$) messen. Außerdem wird man bei einer Wiederholung der Messung mehr oder weniger das gleiche Ergebnis wie zuvor erhalten. In diesem Fall gilt die klassische *Poisson-Verteilung* (Bergmann-Schaefer, 1978, S. 809)

$$w(n) = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \quad (16)$$

mit dem wesentlich kleineren mittleren Schwankungsquadrat

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \quad (17)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{\langle n \rangle}. \quad (18)$$

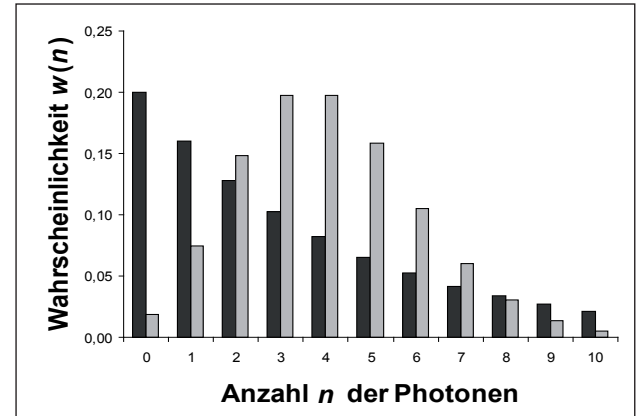


Abb. 2: Bose-Einstein-Verteilung (dunkelgrau) und Poisson-Verteilung (hellgrau) für $\langle n \rangle = 4$ Photonen.

4 Prinzip der Messung von Hanbury-Brown und Twiss

Den prinzipiellen Aufbau des Experimentes von Hanbury-Brown und Twiss zeigt Abbildung 3. Die beiden Spalte werden durch zwei Photomultiplier (M1 und M2) ersetzt. Diese Photomultiplier sind so lichtempfindlich, dass sogar einzelne Photonen nachgewiesen werden können. Jedes Mal, wenn ein Photon (oder mehrere Photonen) auf einen Photomultiplier treffen, gibt der Photomultiplier ein elektrisches Signal ab, das an den Korrelator (K) weitergeleitet wird. Nur wenn beide Photomultiplier innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls τ jeweils ein Signal an den Korrelator melden, wird dieses Ereignis von dem Zähler (Z) berücksichtigt (Koinzidenzschaltung).

Der Abstand $2b$ der beiden Photomultiplier sei zunächst kleiner als die transversale Kohärenzlänge des Sternenlichts (siehe Abschnitt 1).

$$2b < 2b_{\max}. \quad (19)$$

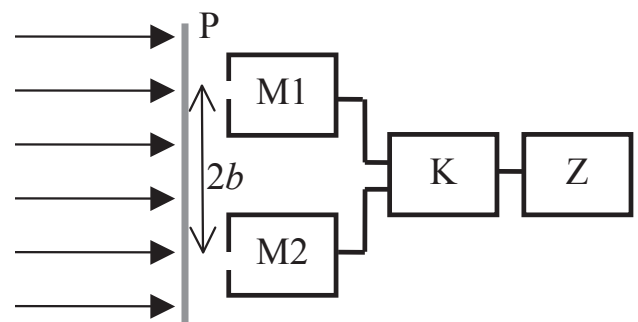


Abb. 3: Schematischer Aufbau des Experimentes von Hanbury-Brown und Twiss (Erläuterung im Text)

Außerdem gelte für das Zeitintervall des Korrelators

$$\tau \leq T_K. \quad (20)$$

Hierbei ist T_K die so genannte Kohärenzzeit des Sternenlichts. Sie hängt mit der spektralen Bandbreite Δf des Sternenlicht (eventuell durch ein zusätzliches Spektralfilter eingeengt) über die Formel

$$T_K \approx \frac{1}{\Delta f} \quad (21)$$

zusammen (Donges 1991). Dank des vorgesetzten Polarisators P treffen in diesem Fall auf die beiden Photomultiplier nur Photonen, die zum gleichen Mode gehören. Diese Photonen unterliegen der Bose-Einstein-Verteilung. Wegen der Klumpenbildung werden, sofern überhaupt Photonen registriert werden, oft beide Photomultiplier angesprochen und durch den Zähler registriert werden.

Wird der Abstand der beiden Photomultiplier erhöht, so dass

$$2b > 2b_{\max} \quad (22)$$

gilt, so ist die Situation vollkommen anders: Auf die beiden Photomultiplier treffen nun Photonen, die nicht mehr zum gleichen Mode gehören. Wegen der nun geltenden Poisson-Verteilung nimmt die Anzahl der Koinzidenzen – im Vergleich zu vorher – stark ab, da das Phänomen der Klumpenbildung für diese Photonen nicht mehr zutrifft.

Die transversale Kohärenzlänge $2b_{\max}$ kann aus Abbildung 4 entnommen und mit Gleichung (1) der Sterndurchmesser berechnet werden.

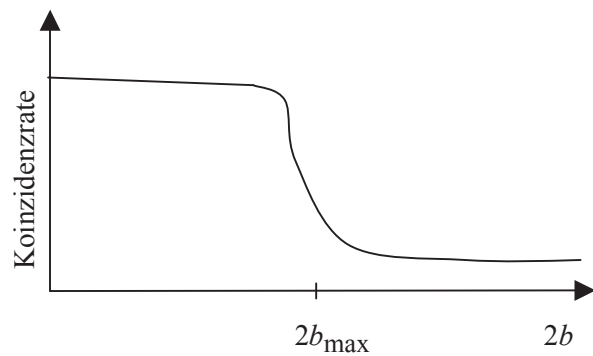


Abb. 4: Prinzipieller Verlauf der Koinzidenzrate in Abhängigkeit vom Abstand $2b$

Literatur

- Hanbury-Brown, R.; Twiss, R. Q. (1956): A test of a new type of stellar interferometer on sirius. In: Nature 178, S. 1046-1048.
- Donges, Axel (1990): Elementare Quantenoptik. Heidelberg: Hüthig ISBN 3-77785-1901-8.
- Bermann-Schaefer (1978): Lehrbuch der Experimentalphysik Band III Optik. Berlin: de Gruyter ISBN 3-11-007457-5.
- Donges, Axel (1991): Die Kohärenzbedingungen. In: Physik und Didaktik 19/2, S. 109–118.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Axel Donges
 Fachhochschule und Berufskollegs nta
 Prof. Dr. Grübler gGmbH
 Seidenstraße 12–35
 88316 Isny im Allgäu
 donges@nta-isny.de