Ein etwas vernachlässigter Mittelwert

AVITAL LANN UND RUMA FALK, ISRAEL

Zusammenfassung*: In verschiedenen Zusammenhängen kann man dem Eigengewichtsmittel begegnen. Es ist dasjenige gewichtete Mittel, bei dem jeder Wert mit sich selbst gewichtet wird. Das Eigengewichtsmittel wird in Zusammenhang mit anderen Mittelwerten gebracht. Die mit ihm verbundenen Intuitionen werden untersucht.*

1 Einleitendes Beispiel

Das folgende Beispiel stammt aus vos Savant (1996; 56-58; hier sehr modifiziert): Man sucht für sich ein geeignetes College und entscheidet sich dann für eines, das mit einer durchschnittlichen Klassengröße von 40 Studenten (bei 3 Kursen) wirbt; dabei schwankt die Klassengröße zwischen 5 und 105. Eine kleine Klassengröße wird dabei als Vorteil angesehen. Nachdem man sich eingeschrieben hat, stellt man enttäuscht fest, dass aus Sicht der Studenten die durchschnittliche Klassengröße etwa 93 beträgt. Hat man Grund zur Klage?

Die 3 Kurse haben die Klassengrößen 5, 10 und 105. Die durchschnittliche Klassengröße beträgt tatsächlich $\frac{5+10+105}{3}=40$.

Wenn man jeden der 120 Studenten fragt, wie groß seine Klasse ist, trifft man mehr Studenten aus größeren Klassen an. 105 Studenten sagen „105“, 10 sagen „10“ und 5 sagen „5“. Der Durchschnitt aller studentischen Antworten ist

$$\frac{105\cdot 105+10\cdot 10+5\cdot 5}{120}\approx 93.$$

Gewichtete Mittelwerte, bei denen die Gewichte mit den zu mittelnden Werten übereinstimmen, kommen häufiger vor, als man denkt.

2 Definitionen

Das gewichtete Mittel der n Zahlen $x_1, ..., x_n$ ist

$$W=\frac{w_1\cdot x_1+\cdots+w_n\cdot x_n}{w_1+\cdots+w_n},$$

wobei die Gewichte $w_i \geq 0$ sind.

Für n nichtnegative Zahlen $x_1, ..., x_n$ ist das *Eigengewichtsmittel* (self-weighted mean) durch

$$E=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}$$

definiert (Lann und Falk 2002).

3 Zusammenhang zu anderen Mittelwerten

Die gebräuchlichen Mittelwerte sind das arithmetische (A), das geometrische (G) und das harmonische (H) Mittel (die beiden letzten sind nur für positive x-Werte definiert):

$$A=\frac{x_1+...+x_n}{n}$$

$$G=\sqrt[n]{x_1\cdot ...\cdot x_n}$$

$$H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}=\frac{\frac{1}{x_1}\cdot x_1+...+\frac{1}{x_n}\cdot x_n}{\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_n}}$$

Offensichtlich sind das arithmetische und das harmonische Mittel spezielle gewichtete Mittel (für $n=2$ kann auch das geometrische Mittel als gewichtetes Mittel interpretiert werden; siehe Tabelle 1).

Jeder Mittelwert liegt zwischen dem Minimum und dem Maximum aller zu mittelnden Werte, und auch die begrenzenden Werte lassen sich als gewichtete Mittelwerte interpretieren. Stets gilt

$$x_{min}\leq H\leq G\leq A\leq E\leq x_{max}.$$

4 Geometrische Deutung

Für zwei Werte a und b kann man die Beziehung zwischen den Mittelwerten gut graphisch illustrieren, etwa mit Hilfe eines Trapezes (Beckenbach und Bellman 1961, S. 62 und 126; Hoehn 1984).

Es sei $0<a\leq b$. Das Trapez habe parallele Seiten mit den Längen a und b. Jede weitere Parallelstrecke hat eine Länge, die einem speziellen gewichteten Mittel entspricht (Bild 1). Das Verhältnis $\frac{w_a}{w_b}$ zwischen den Höhen der kleineren Trapeze ist das Verhältnis der zu a bzw. zu b gehörigen Gewichte.

Die Länge einer solchen Parallelstrecke ist

$$W=\frac{w_a\cdot a+w_b\cdot b}{w_a+w_b}.$$

Jeder der oben erwähnten Mittelwerte kann als gewichtetes Mittel mit den Gewichten w_a und w_b geschrieben werden und kann daher als Parallelstrecke visualisiert werden (Bild 2). Man beachte, dass es ausreicht, das Verhältnis $\frac{w_a}{w_b}$ zu kennen, um W zu bestimmen.

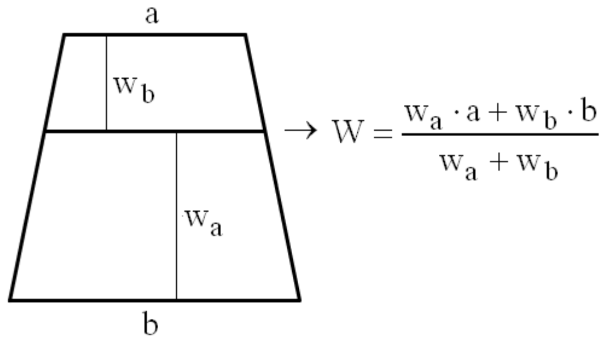

Bild 1

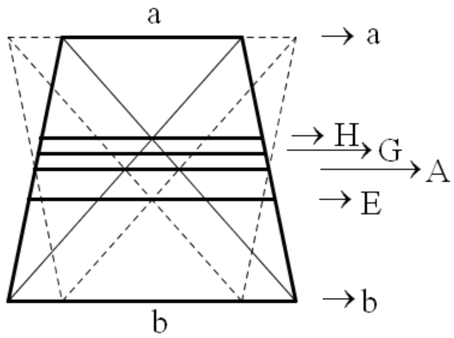

Bild 2

Man beachte auch die reziproke Beziehung zwischen H und E; in Figur 2 gehen sie auseinander hervor, indem man beim Trapez oben und unten vertauscht. Für $n = 2$ haben H und E beide zu A denselben Abstand. (Daher wird E bei Hoehn 1984 als antiharmonisches Mittel bezeichnet.)

5 Wo kommt das Eigengewichtsmittel sonst noch vor?

A. Bei einer Bushaltestelle steht: „Im Schnitt kommt alle 20 Minuten ein Bus“. Bei zufälligem Ankommen an der Haltestelle ist also mit einer durchschnittlichen Wartezeit von 10 Minuten zu rechnen. Gleichwohl stellt man fest, dass man eine durchschnittliche Zeit von 16 Minuten warten muss. Was ist hier los?
Wenn die Hälfte der Busintervalle 36 Minuten und die andere Hälfte 4 Minuten beträgt, so ist das durchschnittliche Intervall tatsächlich 20 Minuten. Der Erwartungswert der Wartezeit hingegen ist $\frac{36}{40} \cdot 18 + \frac{4}{40} \cdot 2 = 16{,}4$ Minuten. Wenn man an zufälligen Zeitpunkten an der Haltestelle ankommt, ist die Wahrscheinlichkeit, während eines langen Busintervalls anzukommen, viel größer als die zu einem kurzen Intervall gehörige. Die Wahrscheinlichkeit, während eines bestimmten Intervalls anzukommen, ist proportional zu seiner Länge. Der Erwartungswert der Wartezeit wird als Eigengewichtsmittel aller halben Intervall-Längen berechnet. Immer, wenn die Busintervalle verschieden lang sind, ist die durchschnittliche Wartezeit länger als die Hälfte des arithmetischen Mittels aller Intervall-Längen. Van Dyck (1997, S. 27) schreibt: „Variation ist der wesentliche Grund für das Warten”.

B. In medizinischen Tests an zufällig ausgewählten Patienten werden langsam wachsende Tumore mit größerer Wahrscheinlichkeit

Mittel	Definition für $0 < a < b$ als gewichtetes Mittel	w_a	w_b	Definition der Parallelstrecke
Minimum	$x_{min} = \min(a,\ b) = a = \frac{1 \cdot a + 0 \cdot b}{1 + 0}$	1	0	kurze Seite
harmonisch	$H = \frac{\frac{1}{a} \cdot a + \frac{1}{b} \cdot b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	geht durch den Diagonalenschnittpunkt
geometrisch	$G = \sqrt{a \cdot b} = \frac{\sqrt{b} \cdot a + \sqrt{a} \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}$	teilt das Trapez in zwei zueinander ähnliche Trapeze
arithmetisch	$A = \frac{1 \cdot a + 1 \cdot b}{1 + 1}$	1	1	Mittelparallele des Trapezes
Eigengewicht	$E = \frac{a \cdot a + b \cdot b}{a + b}$	a	b	geht durch den Diagonalenschnittpunkt des gedrehten Trapezes
Maximum	$x_{max} = \max(a,\ b) = b = \frac{0 \cdot a + 1 \cdot b}{0 + 1}$	0	1	lange Seite

Tabelle 1

erkannt, als deren Anteil an Tumoren überhaupt entspricht, weil sie über einen längeren Zeitraum präsent sind (Zelen und Feinleib 1969). Daher ist die aus solchen Tests gewonnene Schätzung über den Anteil langsam wachsender Tumore nicht zuverlässig.

6 Zum intuitiven Verständnis des Eigengewichtsmittels

Wir stellten 90 statistisch ungebildeten Studenten der Hebräischen Universität folgendes Problem:
Jeweils 100 Familien haben 1 Kind bzw. 2 Kinder bzw. 3 Kinder bzw. 4 Kinder.
Wie viele Geschwister hat ein durchschnittliches Kind?
Die Studenten antworteten, dass die durchschnittliche Familie $\frac{1+2+3+4}{4} = 2{,}5$ Kinder habe und dass deswegen 1,5 die richtige Antwort sei.
In Wirklichkeit ist nicht nach der durchschnittlichen Familie, sondern nach dem durchschnittlichen Kind gefragt, und das wächst in einer Familie mit $\frac{1 \cdot 100 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 + 4 \cdot 400}{100 + 200 + 300 + 400} = 3$ Kindern auf, so dass 2 die richtige Antwort ist.
65 Studenten gaben die falsche Antwort an.

Die implizite Annahme, dass beim Bilden von Mittelwerten alle Gewichte gleich groß seien, ist vergleichbar mit der Beschreibung (Tversky und Kahneman 1974) von heuristischen Prinzipien, auf die sich Leute verlassen, wenn sie unbekannte Größen abschätzen müssen. Die Verwendung solcher heuristischer Prinzipien verringert die Komplexität der Aufgaben. Die Annahme gleicher Gewichte (Albert 2003) steht in Übereinstimmung mit einer Tendenz, Symmetrien und faire Verhältnisse anzunehmen.

7 Didaktische Bemerkungen

Man kann Schülern helfen, nicht in die Falle gleicher Gewichte zu tappen, indem man einfache Experimente durchführt. Dazu gehört ein Glücksrad mit vier Sektoren, von den zwei zu 45° und zwei zu 135° gehören (Bild 3). Der Gewinn soll so groß sein wie die Maßzahl des Winkels.

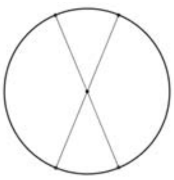

Bild 3

Das arithmetische Mittel aller Gewinne ist 90, das Eigengewichtsmittel hingegen 112,5. hier kann man direkt sehen, dass das arithmetische Mittel nicht angemessen ist.

Literatur

Albert, I. H. (2003). College students' conceptions ofprobability. The American Statistician, 57(1), 37-45.

Beckenbach, E. and Bellman, R. (1961). An introduction to inequalities. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Hoehn, L. (1984). A geometrical interpretation of the weighted mean. The College Mathematics Journal, 15(2), 135-9.

Lann, A. and Falk, R. (2002). An average with unimaginative weights: when the weights equal the values. In: A.D. Cockburn & E. Nardi (eds), Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, volume I, p. 288. Norwich: University of East Anglia.

Sheldon, N. (2004). The generalized mean. Teaching Statistics, 26(1), 24-5.

Tversky, A. and Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Science, **185,** 1124-31.

van Dijk, N.M. (1997). To wait or not to wait: that is the question. Chance, 10(1), 26-30.

vos Savant, M. (1996). The Power of Logical Thinking. New Y ork: St Martin's Press.

Zelen, M. and Feinleib, M. (1969). On the theory of screening for chronic diseases. Biometrika, 56(3), 601-14.

Bei der Übersetzung hat der Heftherausgeber die Originalquelle z.T. gekürzt, z.T. erweitert und bearbeitet.

Originalquelle:
Avital Lann and Ruma Falk:
A Closer Look at a Relatively Neglected Mean

Teaching Statistics. Vol 27 (3), Autumn 2005, 76 – 80.

Anschrift der Verfasser:
Avital Lann and Ruma Falk
The Hebrew University of Jerusalem, Israel.
e-mail: avitalan@pob.huji.ac.il
rfalk@cc.huji.ac.il