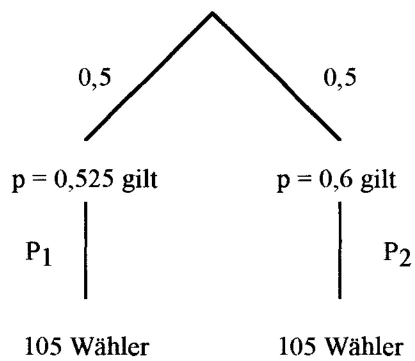
Anmerkungen zu „Erfahrungen mit einer Grundkurs Abituraufgabe“ von Dr. A. Hildebrand in Stochastik in der Schule 21 (2001) 1

HELMUT WIRTHS

Zur Lösung von Aufgabe 2.4 möchte ich einige Anregungen geben, um die Vielfalt an Lösungsmöglichkeiten bei einer solchen Problemstellung deutlich zu machen. Stellen wir uns vor, Bauer Grotebohnenkamp (alias Feldherter in den Lösungsskizzen) hat in einem kleinen Kreis vor der entscheidenden Sitzung seine Ideen, insbesondere die Lösung von 2.4, vorgestellt. Bauer Piepenbrink berichtet seinem Sohn davon. „Und das lässt Du Dir gefallen“, meint der Sohn, „hast Du gar keinen eigenen Standpunkt ? Lass Dich doch nicht mit diesen Argumenten über den Tisch ziehen.“ „Was soll ich denn Deiner Meinung nach tun ?“ „Gehe doch direkt auf die Argumente ein, aber sage deutlich, dass Du sie anders bewertest. Wenn 60 % weiterhin Eure Partei wählen, dann erwartet man im Mittel 120 Wähler bei 200 Befragten. Sag doch einfach, 105 seien Dir zu weit von den erwarteteten 120 entfernt, so dass Du 60 % nicht mehr akzeptieren kannst. Und wenn sie dann weiter diskutieren wollen, dann bringst Du die Wahrscheinlichkeit, dass bei 60 % Wählern von 200 Personen 105 oder weniger PdL wählen, ins Spiel. Sie beträgt ca. 1,8 %. Das ist Dir zuwenig. Lass Dich doch nicht auf die Diskussion mit der Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% ein. Du gehst davon aus, dass weniger als 60 % PdL wählen werden. Schliesslich hattet Ihr schon vorher Eure Zweifel und habt deshalb die Befragung in Gang gesetzt. Und das Ergebnis der Befragung stützt doch eher die Zweifel an den 60 % und ist kaum als Bestätigung für 60 % Wähler zu werten“

„Das klingt ja ganz gut. Aber ich gehe doch dann auch zunächst von 60 % Wählern aus und versuche, das zu widerlegen. Ich möchte aber von Anfang an einen eigenen Standpunkt vertreten und von einer geringeren Wählerbeteiligung ausgehen.“ „105 von 200 sind 52,5 %. Sag doch einfach, dass Du das Ergebnis der Umfrage als Schätzung für den zu erwartenden Wähleranteil der PdL nimmst. Dann gibt es zwei Hypothesen. H_1 lautet : “Der Wähleranteil beträgt 52,5 %.“ (Bauer Piepenbrink) sowie H_2 : „Der Wähleranteil ist 60 %.“ (Bauer Grotebohnenkamp). Stellen wir uns ein neutrales Schiedsgericht vor, das vor der Umfrage (a-priori) beide Hypothesen gleich bewertet. Dies wird in der ersten Stufe des nebenstehenden Baumdiagramms dargestellt. Nun erfährt das Schiedsgericht, dass von 200 Personen 105 PdL wählen wollen. Wie es auf dieses Umfrageergebnis hin (a-posteriori) die beiden Hypothesen bewertet, soll nun dargestellt werden. Die Wahrscheinlichkeit P_1, dass von 200 Personen 105 PdL wählen, falls p = 0,525 gilt, ist : $P_1 = \binom{200}{105} \cdot 0{,}525^{105} \cdot 0{,}475^{95} \approx 0{,}056$. Entsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit P_2, dass 105 von 200 Personen PdL wählen, falls p = 0,6 gilt : $P_2 = \binom{200}{105} \cdot 0{,}6^{105} \cdot 0{,}4^{95} \approx 0{,}0056$. Im folgenden Baumdiagramm stelle ich Dir die gerade beschriebene Situation dar :



P_1 ist ca. 10 mal so gross wie P_2. Es ist ein Ereignis („105 von 200 Personen wollen PdL wählen.“) eingetreten, dessen Wahrscheinlichkeit $0{,}5 \cdot P_1 + 0{,}5 \cdot P_2$ ist. Der Pfad mit der Hypothese H_1 hat an dieser Wahrscheinlichkeit den Anteil $\frac{0{,}5 \cdot P_1}{0{,}5 \cdot P_1 + 0{,}5 \cdot P_2} = \frac{P_1}{P_1 + P_2} \approx 0{,}09$, der Pfad mit der Hypothese H_2 den Anteil $\frac{P_2}{P_1 + P_2} \approx 0{,}91$. Stellen wir uns eine Waage mit zwei Waagschalen vor. A-priori war die Waage im Gleichgewicht. A-posteriori liegt bei H_1 ein in etwa 9 mal grösseres Gewicht als bei H_2. Es spricht 9 mal soviel dafür, dass p = 0,525 gilt als p = 0,6, spricht also neun Mal stärker für Deine Meinung als für die von Grotebohnenkamp.“

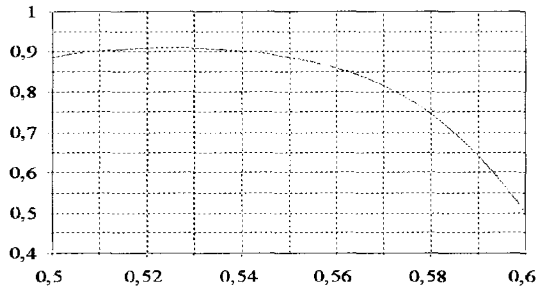
„Bei dieser Vorgehensweise kann man mir doch vorwerfen, meine Hypothese erst nach der Umfrage gebildet zu haben. Das möchte ich gern vermeiden." „Kein Problem. Dafür gibt es in der Mathematik ja Variablen. Überall in der bisherigen Rechnung ersetzen wir 0,525 durch die Variable p. Wir interessieren uns für alle p mit $0{,}5 \le p < 0{,}6$. Wir erhalten dann für die Wahrscheinlicheit, mit der wir a-posteriori Deine Hypothese H_1 bewerten, den Term $P_1 =$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\binom{200}{105}\cdot p^{105}\cdot(1-p)^{95}}{\frac{1}{2}\cdot\binom{200}{105}\cdot p^{105}\cdot(1-p)^{95}+\frac{1}{2}\cdot\binom{200}{105}\cdot 0{,}6^{105}\cdot 0{,}4^{95}}$$

$$= \frac{p^{105}\cdot(1-p)^{95}}{p^{105}\cdot(1-p)^{95}+0{,}6^{105}\cdot 0{,}4^{95}}$$ und für die Wahrscheinlichkeit, mit der wir Grotebohnenkamps Hypothese H_2 bewerten, den Term $P_2 =$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\binom{200}{105}\cdot 0{,}6^{105}\cdot 0{,}4^{95}}{\frac{1}{2}\cdot\binom{200}{105}\cdot p^{105}\cdot(1-p)^{95}+\frac{1}{2}\cdot\binom{200}{105}\cdot 0{,}6^{105}\cdot 0{,}4^{95}}$$

$$= \frac{0{,}6^{105}\cdot 0{,}4^{95}}{p^{105}\cdot(1-p)^{95}+0{,}6^{105}\cdot 0{,}4^{95}}$$. Das sieht vielleicht unübersichtlich aus. Aber ich veranschauliche Dir das einmal mit meinem Taschenrechner." Und nun holt Sohn Piepenbrink seinen grafikfähigen Taschenrechner und gibt im „y="-Menü den oben angegebenen Term P_1 bei y_1 ein. Allerdings muss er anstelle der Variablen p die Variable x benutzen, damit der Taschenrechner den Term korrekt interpretiert. Dann stellt er im „WINDOW"-Menü $x_{min} = 0{,}5$, $x_{max} = 0{,}6$, $x_{scal} = 0{,}001$, $y_{min} = 0$, $y_{max} = 1$ und $y_{scal} = 0{,}1$ ein. Ausserdem gibt er im „TBLSET"-Menü TblStart = 0,5, ΔTbl = 0,01 sowie Indpnt und Depend auf Auto ein. Nach einem Druck auf die „GRAPH"-Taste zeichnet der Taschenrechner den Graphen von y_1, der folgendermaßen aussieht :



Auf der waagerechten Achse wird die von Bauer Piepenbrink geschätzte Wahrscheinlichkeit p aufgetragen. Auf der dazu senkrechten Achse die Wahrscheinlichkeit P_1, dass von 200 Personen 105 PdL wählen wollen, wobei die Wahrscheinlichkeit, PDL wählen zu wollen, p beträgt. „Du siehst, im gesamten uns interessierenden Bereich $0{,}5 \le p < 0{,}6$ ist die Wahrscheinlichkeit für Deine Hypothese H_1 grösser, zum teil erhablich grösser als die für Hypothese H_2. Am besten fährst Du mit p = 0,525. Hier ist der Unterschied am grössten. Aber wenn Du Dich dem Wert p = 0,6 näherst, dann rücken die beiden Wahrscheinlichkeiten für H_1 und H_2 immer näher aneinander." Bauer Piepenbrink geht nach diesen Ausführungen zu Karl Stochast, dem Mathematiklehrer seines Sohnes. Als der ihm die Korrektheit aller Überlegungen bestätigt, muss Bauer Piepenbrink ihm gestehen, dass er jetzt überzeugt ist, dass sich die Anschaffung eines grafikfähigen Taschenrechners gelohnt hat. Ursprünglich hatte er nämlich vehement für einen Vier-Spezies-Rechner plädiert. Und Karl Stochast mach sich Notizen. Er hat gutes Material für Klausur- und Abituraufgaben bekommen. Er notiert sich folgende Ideen, wobei er die genaue Ausarbeitung von konkreten Arbeitsaufträgen auf einen späteren Termin verschiebt :

- Rede der Bauern Grotebohnenkamp und Piepenbrink vor Parteifreunden, in denen jeder seinen Standpunkt vertritt. Mit solchen Arbeitsaufträgen, in denen es neben mathematischer Korrekt heit auch um verständliche, nach vollziehbare und überzeugende Ausführungen geht, hat Karl Stochast gute Erfahrungen gemacht.
- Stochast kennt seine Querköpfe. Was ist, wenn sie sich nicht auf eine a-priori Verteilung von 0,5 zu 0,5 einlassen, sondern ihre eigene Meinung erheblich höher einschätzen als die des Gegners ?
- Und wenn einer der beiden nur seine eigene Mei nung gelten lässt ?
- Die Terme P_1 und P_2 sind nur für $0 \le p \le 1$ und $p \neq 0{,}6$ definiert. Sollte man für p = 0,6 einen Wert definieren, wenn ja, welchen ?

Ich würde mich sehr freuen, wenn die nächsten veröffentlichten Aufgaben zu einer solchen Fragestellung die grosse Bandbreite an Lösungsmöglichkeiten widerspiegeln. Nach meinen Erfahrungen lohnt sich eine Behandlung im Grund- wie im Leistungskurs. Die benötigte 1. und 2. Pfadregel werden bereits sehr früh im Unterricht behandelt. Der hier vorgestellte anschauliche Umgang mit dem Satz von Bayes kann daran anschliessend behandelt werden.

Anschrift des Verfassers :
Helmut Wirths, Starenweg 22
26131 Oldenburg
helmut.wirths@uni-oldenburg.de