Armutsmessung über α-Durchschnitte

GERHARD KOCKLÄUNER, KIEL

Zusammenfassung: *Die Vereinten Nationen veröffentlichen seit einigen Jahren den Index für menschliche Armut. Dieser Index fasst verschiedene menschliche Einschränkungen zusammen. Zur Berechnung wird ein spezieller α-Durchschnitt herangezogen. α-Durchschnitte verallgemeinern bekannte Mittelwertansätze. Sie weisen besondere statistische Eigenschaften auf.*

1. Der Index für menschliche Armut (HPI)

Traditionell wird das Ausmaß von Armut einkommensbezogen gemessen. Menschliche Armut ist aber ein mehrdimensionales Konstrukt. So tragen in Entwicklungsländern neben wirtschaftlichen Einschränkungen insbesondere ein eingeschränktes Lebensalter sowie Einschränkungen in Bildung und Wissen zur menschlichen Armut bei. Die Vereinten Nationen haben 1997 einen Index für menschliche Armut (Human Poverty Index – HPI) vorgestellt, der die genannten Einschränkungen zusammenfaßt (vgl. UNDP (1997)). Konkret wird der Bereich der Lebensdauer durch den Prozentsatz P_1 derjenigen Menschen erfasst, die wahrscheinlich keine 40 Jahre alt werden. Fehlende Bildung wird über den Prozentsatz P_2 erwachsener Analphabeten gemessen. Wirtschaftliche Einschränkungen sind als arithmetisches Mittel von den Prozentsätzen P_{31} der Bevölkerung ohne Zugang zu Trinkwasser, P_{32} der Bevölkerung ohne Zugang zu Gesundheitsdiensten und P_{33} von untergewichtigen Kindern unter fünf Jahren, also als Prozentsatz $P_3 = (P_{31} + P_{32} + P_{33})/3$ definiert. Der Index HPI ergibt sich aus diesen Prozentsätzen über

$$HPI = ((P_1^3 + P_2^3 + P_3^3)/3)^{1/3}. \qquad (1)$$

Aktuell liegen HPI-Werte für 92 Entwicklungsländer vor (vgl. UNDP (1999, S. 180 ff.)). Einen Ausschnitt zeigt Tabelle 1.

Tabelle 1 enthält Indikator- und HPI-Werte für die jeweils drei am besten bzw. am schlechtesten plazierten unter den betrachteten Entwicklungsländern. Auffällig sind dabei die großen Schwankungen unter den mängelbezogenen Prozentsätzen. Für insgesamt 11 Länder finden sich HPI-Werte, die größer als 50% sind und damit über die Hälfte der jeweiligen Bevölkerung als von menschlicher Armut betroffen ausweisen.

Land	P_1	P_2	P_{31}	P_{32}	P_{33}	HPI
Barbados	3,2	2,4	0	0	5	2,6
Trinidad & Tobago	4,1	2,2	3	1	7	3,5
Uruguay	5,1	2,5	5	0	5	4,0
Sierra Leone	51,0	66,7	66	64	29	57,7
Burkina Faso	40,5	79,3	58	30	30	59,3
Niger	35,7	85,7	52	70	43	65,5

Tabelle 1: HPI für ausgewählte Länder

2. α-Durchschnitte und ihre Eigenschaften

α-Durchschnitte von reellen Zahlen x_i, $i = 1,\ldots,n$ sind definiert als

$$P(\alpha) = ((x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha)/n)^{1/\alpha}. \qquad (2)$$

Offensichtlich liefert $\alpha = 1$ in Gleichung (2) das arithmetische Mittel P(1). Wird $x_i = P_i$ für $i = 1, 2, 3(= n)$ gewählt, ergibt sich mit $\alpha = 3$ der Index für menschliche Armut als P(3) = HPI gemäß Gleichung (1). Für Prozentsätze P_i gilt naturgemäß $P_i \geq 0$. Entsprechend wird bei der Bildung von α-Durchschnitten häufig $x_i > 0$ für alle i vorausgesetzt. Dann lassen sich α-Durchschnitte für beliebige reelle α, also auch für $\alpha < 1$ bilden. Z. B. liefert eine Grenzwertbetrachtung für $\alpha \to 0$ das geometrische Mittel P(0). Die Wahl von $\alpha = -1$ führt entsprechend auf das harmonische Mittel P(-1). Da für den HPI aber $\alpha > 1$ angenommen wird, zudem dort $x_i = P_i > 0$ für alle i gilt, soll dieser Fall nachfolgend näher untersucht werden.

So ergeben sich wesentliche Eigenschaften des HPI aus der Funktion f, die α-Durchschnitte begründet:

$$f(x) = x^\alpha/\alpha \text{ für } x > 0. \qquad (3)$$

Die Funktion f aus Gleichung (3) ist bei $\alpha > 1$ streng konvex. f(x) steigt also mit steigendem x, aber auch mit steigenden Zuwachsraten von x. Konvexität bedeutet insbesondere, dass z.B. für x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ und $x = (x_1 + x_2)/2$ gilt: $f(x) < (f(x_1) + f(x_2))/2$. Werden für x_1 und x_2 die Prozentsätze P_1 und P_2 (z.B. für das Land Niger aus Tabelle 1) eingesetzt, liefert die Funktion f damit eine soziale Bewertung dieser Prozentsätze: Das im HPI auszuweisende Ausmaß an Armut, repräsentiert durch $(f(P_1) + f(P_2))/2$, soll größer sein als dasjenige Ausmaß, welches sich bei $P_1 = P_2$ zeigen würde. Hohe prozentuale Einschränkungen in einem der erfassten Bereiche sollen also durch den Ansatz der Armutsmessung bestraft werden.

Übertragen auf α-Durchschnitte von positiven reellen Zahlen x_i, $i = 1,...,n$ mit $\alpha > 1$ heißt das: $P(\alpha) = P(1)$, wenn $x_1 = ... = x_n$, aber $P(\alpha) > P(1)$, wenn nicht alle x_i übereinstimmen. Für den Index HPI mit $\alpha = 3$ bedeutet die Ungleichung $P(3) > P(1)$: Gibt es für ein Land in den genannten Bereichen unterschiedlich hohe prozentuale Einschränkungen, dann liegt das daraus zu bildende arithmetische Mittel unter dem ausgewiesenen HPI-Wert. Höhere prozentuale Einschränkungen werden bei der Berechnung des HPI also stärker gewichtet als niedrigere.

Für $\alpha > 2$ zeigt sich auch die erste Ableitung f′ der Funktion f aus Gleichung (3) als konvex. Konvexität bedeutet hier, dass $P(\alpha)$ für $\alpha > 2$ ein Sensitivitätsaxiom für Distanztransfers erfüllt. Dieses betrachtet positive reelle Zahlen x_i und $x_i + d$ mit $d > 0$ als gegebener Distanz. Wird nun ein Teil von x_i zu $x_i + d$ transferiert, steigt $P(\alpha)$. Der betreffende Anstieg, so das Axiom, vergrößert sich jedoch mit steigendem x_i. Zur Illustration dieses Axioms für $P(3) = HPI$ können die prozentualen Einschränkungen für Barbados aus Tabelle 1 herangezogen werden. Mit $P_1 = 3{,}2$, $P_2 = 2{,}4$ und nach unten gerundet $P_3 = 1{,}6$ gilt $P_1 - P_2 = P_2 - P_3 = d = 0{,}8$. Sinkt nun P_3 um z.B. einen Prozentpunkt und steigt dafür P_2 um einen Prozentpunkt, dann steigt natürlich P(3). Der betreffende Anstieg von P(3) ist aber kleiner als derjenige, der sich ergibt, wenn P_2 um einen Prozentpunkt sinkt und P_1 gleichzeitig um einen Prozentpunkt steigt. Zum genannten Sensitivitätsaxiom und anderen Axiomen der einkommensbezogenen Armutsmessung sei auf Schaich (1995) verwiesen.

Für $\alpha > 1$ und ausschließlich positive x_i gilt naturgemäß $P(\alpha) \le \max(x_1, ..., x_n)$, d.h. dann $P(3) = HPI \le \max(P_1, P_2, P_3)$. Bei nicht identischen x_i wächst $P(\alpha)$ jedoch mit steigendem α und erreicht bei $\alpha \rightarrow \infty$ das genannte Maximum. Vor diesem Hintergrund muß die Wahl von $\alpha = 3$ für den HPI willkürlich erscheinen, eine Aussage, die die Autoren des HPI auch bestätigen (vgl. UNDP (1997, S. 149)).

Literatur

Schaich, E. (1995): Sensitivitätsanalyse von Armutsmaßen. - In: Allgemeines Statistisches Archiv 79, S. 376 – 401.

UNDP (1997): Bericht über die menschliche Entwicklung 1997. - Bonn.

UNDP (1999): Bericht über die menschliche Entwicklung 1999. - Bonn.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Gerhard Kockläuner
FB Wirtschaft, FH Kiel
Sokratesplatz 2,
24149 Kiel