Die Geburt der Stochastik

Helmut Wirths, Oldenburg

Zusammenfassung: Wer versucht, Geschichte der Mathematik in den Unterricht mit einzubeziehen, trifft meist auf reges Interesse bei den Schülerinnen und Schülern. In diesem Aufsatz wird Material dargestellt, das im Zusammenhang mit der Frage nach den Anfängen der Stochastik als selbständiges Gebiet innerhalb der Mathematik zusammengestellt wurde. Der Beitrag gliedert sich nach Fragen, die von Lernenden häufig gestellt werden: Welche Personen waren beteiligt? Welche Probleme wurden damals diskutiert? Worin bestand das Neuartige? Warum setzt man die Geburt der Stochastik im Jahr 1654 an? Gab es vorher keine Stochastik oder kein stochastisches Denken? Am Ende dieses Beitrags werden Vorschläge zur Einbettung in den Unterricht gemacht.

1. Die beteiligten Personen

Eine sehr kurze Beschreibung über die Geburt der Stochastik gibt der französische Mathematiker Simeon Denis Poisson. Er schreibt 1837 im Vorwort seines Buchs „Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités“ auf Seite 1 : „Ein aus Glücksspielen stammendes Problem, das einem strengen Jansenisten [s. Anm. 1] von einem Weltmann unterbreitet wurde, war der Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.“ Im Titel des Buchs von Poisson wird deutlich, in welche Richtung sich die Stochastik aus den Problemen über Glücksspiele heraus in fast 200 Jahren entwickelt hat, bei Poisson sind es Überlegungen über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Straf- und auf das Zivilrecht. Vielleicht gibt es inzwischen auch schon eine Vermutung, wer mit der Charakterisierung Jansenist gemeint ist, und um wen es sich bei dem Weltmann handelt.

Um weiteren Aufschluß zu erhalten, lassen wir mit Leibniz einen Zeitzeugen von damals zu Wort kommen: „Chevalier de Méré, ..., ein Mann von durchdringendem Verstand, der sowohl Spieler als auch Philosoph war, gab den Mathematikern den Anstoß durch Fragen über Wetten. Sie sollten herausfinden, wieviel ein Spieleinsatz wert ist, falls das Spiel in einem bestimmten Stadium während seiner Durchführung abgebrochen würde. Er veranlaßte seinen Freund Pascal, diesen Sachverhalt zu untersuchen. Die Frage erregte Aufsehen und führte Huygens dazu, seine Abhandlung über das Würfelspiel (De Aleae) zu schreiben. Andere Gelehrte ließen sich ebenfalls darauf ein. Man stellte einige Prinzipien auf. Ratspensionär de Witt benutzte sie in seinem Büchlein über Renten, das in Holländisch gedruckt wurde.“ (Leibniz, in Gerhard 1875-90)

Leibniz hatte bei seinem Parisaufenthalt von 1572 bis 1576 alle Beteiligten mit Ausnahme von Pascal, der bereits verstorben war, kennengelernt. Pascals Schriften konnte er bei dessen Schwester studieren. Er hatte außerdem mit Mitgliedern der Gesprächsrunde um den Herzog von

Roannez, die auch die im Zitat angesprochene Frage diskutiert hatten, Kontakt, der über den Parisaufenthalt hinaus erhalten blieb und in Briefen zum Beispiel an Herrn des Billettes überliefert ist.

Im letzten Satz des Zitats spricht Leibniz einen Aspekt seines eigenen Interesses an Stochastik an: die Anwendungen von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Ausgangspunkt war die Aufforderung von Artus Gouffier Duc de Roannez, die jährliche Sterberate zu berechnen, wenn bekannt ist, daß von 64 Menschen 36 im Verlaufe von 10 Jahren verstorben sind (nach Hecht 1992, S. 73). Die Arbeiten von Johan de Witt über Renten, John Graunt über Demographie und Sir William Petty über politische Arithmetik greifen einen solchen Impuls auf. Damit werden Grundlagen für weitere Anwendungen der Stochastik gelegt.

Im Zitat von Leibniz werden direkt Beteiligte, aber auch schon Personen, die Probleme wie Lösungen aufgreifen und darauf aufbauen, deutlich: Chevalier de Méré, Blaise Pascal und sein Briefpartner Pierre de Fermat, Christiaan Huygens, Johan de Witt und nicht zuletzt auch Gottfried Wilhelm Leibniz. Waren sie sich damals bewußt, die Entstehung eines neuen Gebiets erlebt oder aus der Taufe gehoben zu haben? Lassen wir drei der unmittelbar beteiligten Personen zu Wort kommen: Blaise Pascal, Chevalier de Méré und Christiaan Huygens.

Pascal kündigte 1654 der damals noch privaten Pariser Akademie (ich folge hier Haller 1988, S. 266/7 u. Ineichen 1996, S. 144), in einem in lateinischer Sprache abgefaßten Schreiben an die „Celeberima Matheseos Academia Parisiensis“, seine weiteren Pläne an, darunter „eine völlig neue Abhandlung über ein bis heute absolut unerforschtes Gebiet, nämlich der Aufteilung der Chancen in Spielen, die dem Zufall unterworfen sind. ... Und gerade hier muß man um so mehr durch Rechnung untersuchen, je weniger man Aufschluß durch Experimente erhält. Billigerweise sind nämlich die Ergebnisse eines ungewissen Geschehens mehr dem Eintreten durch Zufall als einer naturgegebenen Notwendigkeit zuzuschreiben. Deswegen irrte bis heute dieses Gebiet unentschieden umher; jetzt aber konnte es, das der Erfahrung gegenüber so widerspenstig war, dem Reich des klaren Denkens nicht mehr entfliehen. Wir haben es mit solcher Sicherheit mittels der Mathematik zu einer exakten Wissenschaft gemacht, daß diese, teilhabend an der Genauigkeit jener, schon kühne Fortschritte macht; sie verbindet die Strenge der mathematischen Beweisführung mit der Ungewißheit des Zufalls, wodurch sie scheinbar Gegensätzliches vereinigt, und nimmt so, sich nach beiden nennend, mit Recht einen staunenerregenden Namen an: Mathematik des Zufalls.“ (s. Anm. 2).

Bei der angekündigten Abhandlung handelt es sich um den „Traité du triangle arithmétique“. In der Nacht vom 23. auf den 24. November 1654 erlebte Pascal seine zweite mystische Erweckung; er läßt sein bereits gedrucktes Traktat nicht mehr ausliefern und zieht sich nach Port Royal zurück. Der „Traité du triangle arithmétique“ erschien erst 1665, also nach Pascals Tod.

Der Chevalier de Méré schrieb an Pascal: „Sie wissen, daß ich Dinge in der Mathematik entdeckt habe, die so ausgefallen sind, daß sie die Gelehrten der Antike nicht diskutiert haben, und die die heutigen Mathematiker in Europa überrascht haben. Sie haben über meine Entdeckungen geschrieben, ebenso Huygens, Fermat und viele andere, die sie bewundert haben.“ Dies Zitat kann die Phantasie zu Vermutungen über die Ursache solch einer Äußerung anregen. Interessant ist die Reaktion von Leibniz, der in einem Brief an Herrn des Billettes meint: „Ich habe gelacht über die Anmaßung des Chevalier de Méré in seinem Brief an Pascal.“ (nach Hacking S. 61)

Christiaan Huygens hörte zwar 1656 anläßlich seines ersten Aufenthalts in Paris von dem Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat, konnte aber über die von beiden benutzten Methoden nichts in Erfahrung bringen. (Ich folge hier Haller 1988, S. 267 und Schneider 1988, S. 3/4). „Diese hielten jede ihrer Methoden so sehr geheim, daß ich die gesamte Materie von den Anfangsgründen an selbst entwickeln mußte.“ So steht es im Brief vom 28.9.1657 an seinen Lehrer Frans van Schooten. Huygens erarbeitete sich über den von ihm mit Hilfe des Prinzips der fairen Wette, das schon Cardano geläufig war, begründeten Begriffs des Erwartungswerts einen Zugang zur Behandlung zufälliger Ereignisse. Der aus diesen Arbeiten entstandene Aufsatz „Tractatus de ratiociniis in ludo aleae“ wurde 1657 als Anhang zu den „Exercitationum Mathematicarum Libri Quinque“ von Frans van Schooten veröffentlicht, der auch für die lateinische Übersetzung des von Huygens in holländischer Sprache geschriebenen Manuskripts verantwortlich war. Welche Bedeutung Huygens diesem neuen Gebiet zumißt, geht aus seinen Einführungsbemerkungen hervor: „Ich zweifle auf keinen Fall daran, daß derjenige, der tiefer das von uns Dargebotene zu untersuchen beginnt, sofort entdecken wird, daß es sich hier nicht, wie es scheint, um Spiel und Kurzweil geht, sondern die Grundlagen für eine schöne und überaus tiefe Theorie entwickelt werden.“

Aber für Huygens war diese neue Theorie Teil der Algebra (Ich folge hier Schneider in Scholz 1990, S. 243). 1656 schrieb er in einem Brief an Herrn Carcavi, der ihm den brieflichen Kontakt zu Pascal und Fermat vermittelt hatte, daß er sich bei allen Glücksspielproblemen seines Satzes zur Bestimmung des Erwartungswertes und der Algebra zur Lösung bediene. In seinem Brief an van Schooten, der als Einführung seinem Traktat vorangestellt wurde, wird er deutlicher: „Mein Herr, nachdem ich weiß, daß Sie bei der Veröffentlichung der löblichen Früchte Ihrer Einsicht und Ihrer Arbeit unter anderem dieses Ziel haben, nämlich, durch die Verschiedenheit der behandelten Gebiete zu betonen, wie weit sich unsere außerordentliche Kunst der Algebra erstreckt, zweifle ich auch nicht daran, daß die vorliegende Schrift über die Glücksspielrechnung Ihrem Ziel dienen könnte.“

Zwei gegensätzliche Ansichten über die Zuordnung der damals neuen Glücksspielrechnung: die von Pascal und die von Huygens. Jede vom Standpunkt ihres Vertreters her einleuchtend. Während der Algorithmus zur Berechnung des Erwartungswerts für sich genommen auch heute noch als algebraisches Element in der Stochastik angesehen werden kann, taucht mit dem Pascal'schen Weg tatsächlich eine neue Denkweise auf, die im folgenden Abschnitt dargestellt werden soll.

Zum Abschluß ein Zitat, das zeigt, wie man die Rolle des Chevalier de Méré auch in Auseinandersetzungen einbeziehen kann: „Der Chevalier de Méré darf, wie ich glaube, allen Widersachern der exakten Forschung, und es gibt deren zu jeder Zeit und überall, als ein warnendes Beispiel hingestellt werden; denn es kann auch diesen leicht begegnen, daß genau an jener Stelle, wo sie der Wissenschaft die tödliche Wunde zu geben suchen, ein neuer Zweig derselben, schöner, wenn möglich, und zukunftsreicher als alle früheren, rasch vor ihren Augen aufblüht - wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung vor den Augen des Chevalier de Méré.“, so Georg Cantor 1873 in einem Vortrag über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehalten vor der Naturforschenden Gesellschaft in Halle (Meschkowski 1968, S. 13). Und wer an Cantors Bemühungen um Anerkennung der Mengenlehre und an seinen Konflikt mit Leopold Kronecker, den er in Briefen als seinen „Herrn von Méré“ bezeichnet, denkt, kann die Anspielung in Cantors Rede wohl deuten. Cantors Anspielung auf die tödliche Wunde wird nach Lektüre des *problème des dés* in Abschnitt 2 verständlich werden.

2. Die beiden Probleme

Mit der Behandlung von zwei Problemen wurde im Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat stochastisches Denken entfaltet: das Problem der Würfel (le problème des dés) und das Problem der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch (le problème des partis).

Le problème des dés

Pascal schreibt am Mittwoch, den 29. Juli 1654 an Fermat in seinem Brief, mit dem der Beginn der Stochastik als selbständiges Gebiet verbunden wird (Schneider 1988, S. 30): „Ich habe nicht die Zeit, Ihnen eine Schwierigkeit zu erläutern, die M... [de Méré] sehr befremdete, denn er ist ein sehr tüchtiger Kopf, aber er ist kein Mathematiker (das ist, wie Sie wissen, ein großer Mangel), und er begreift nicht einmal, daß eine mathematische Linie bis ins Unendliche reicht, und ist zutiefst davon überzeugt, daß sie sich aus einer endlichen Zahl von Punkten zusammensetzt; ich habe ihn niemals davon abbringen können. Wenn Sie das zustande brächten, würden Sie ihn vollkommen machen.

Er sagte mir also, daß er aus folgendem Grund einen Fehler in den Zahlen gefunden habe: Wenn man versucht, mit einem Würfel eine Sechs zu werfen, dann ist es von Vorteil, dies mit 4 Würfen zu tun, und zwar wie 671 zu 625. Wenn man versucht, mit 2 Würfeln eine Doppelsechs zu werfen, ist es von Nachteil, dies mit 24 Würfen zu tun. Dennoch verhält sich 24 zu 36 (was die Anzahl der Ergebnisse von zwei Würfeln ist) wie 4 zu 6 (was die Anzahl der Ergebnisse eines Würfels ist). Das ist es, woran er so großen Anstoß nahm und was ihn dazu veranlaßte, öffentlich zu behaupten, daß die Aussagen der Mathematik unsicher seien, und daß die Arithmetik sich widerspreche. Aber Sie werden den Grund dafür sehr leicht verstehen mit Hilfe der Prinzipien, auf denen Sie aufbauen.“ Székely (1990, S. 14-18) bezeichnet daher dieses Problem als „Paradoxon von de Méré“. Interessant ist Pascals Charakterisierung eines tüchtigen Kopfs, der kein Mathematiker ist.

Aber nun zum eigentlichen Problem: Stellen wir uns vor, ich wette auf das Eintreten einer "6 beim Würfeln mit 1 Würfel" oder im anderen Fall auf das Eintreten einer „Doppelsechs beim Werfen mit 2 Würfeln“. Dies sei das Ereignis E. Jemand anderes wettet auf das Eintreten des jeweiligen Gegenereignisses $\neg E$. Für mich ist die Wette von Vorteil, wenn meine Gewinnwahrscheinlichkeit $P(E)$ größer als die Gewinnwahrscheinlichkeit $P(\neg E)$ meines Gegners ist. Es muß also $P(E) > P(\neg E)$ oder äquivalent umgeformt $P(E) > 0{,}5$ sein.

Die Frage von de Méré übersetze ich in unsere aktuelle Fachsprache „Wie oft muß ich mindestens würfeln, damit meine Gewinnwahrscheinlichkeit P(E) größer als 0,5 ist.“ Dabei würfle ich im ersten Fall mit 1 Würfel und erhalte bei jedem Versuch mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/6$ eine „6“. Im zweiten Fall würfle ich mit 2 Würfeln und erreiche bei jedem Versuch mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/36$ eine Doppelsechs. Das für mich günstige Ereignis E beschreibe ich im ersten Fall durch „Nach n Würfen habe ich wenigstens einmal eine 6 erhalten.“ und im zweiten Fall durch „Nach n Versuchen habe ich wenigstens einmal eine Doppelsechs bekommen.“ Entsprechend gilt für das für mich ungünstige Gegenereignis $\neg E$ „Nach n Versuchen habe ich keinmal eine 6 erzielt.“ sowie „Nach n Versuchen habe ich keinmal eine Doppelsechs bekommen.“

für 1 Würfel	**für 2 Würfel**	**allgemein**
$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}5$	$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > 0{,}5$	
$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}5$	$\left(\frac{35}{36}\right)^n < 0{,}5$	
$n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{5}{6}}$	$n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{35}{36}}$	$(1 - p)^n < 0{,}5$
$n > 3{,}8...$	$n > 24{,}6...$	$n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln (1 - p)}$

Die kritische Zahl für die Wette mit 1 Würfel und dem Erwarten mindestens einer „6“ in n Versuchen lautet also 4, die kritische Zahl für die Wette mit 2 Würfeln und dem Erwarten mindestens einer Doppelsechs in n Versuchen lautet 25. Ist die vereinbarte Zahl an Versuchen größer oder gleich dieser kritischen Zahl, dann ist die Wette auf das Ereignis E günstig, sonst ist sie ungünstig. Die Arithmetik widerspricht (dementiert) sich, so empfindet es Chevalier de Méré. Dies ist die „tödliche Wunde“, von der Cantor gesprochen hat. Székely führt eine „Propoportionalitätsregel der kritischen Zahlen“ an. Nach dieser Regel sollte zu einem Sechstel der Wahrscheinlichkeit das Sechsfache der kritischen Zahl gehören.

Der Chevalier denkt in solchen Proportionalitäten. Er konnte nicht verstehen, weshalb die tatsächlichen kritischen Zahlen der beiden Wetten nicht in Einklang mit der Proportionalitätsregel stehen (s.a. Anmerkung 3). „Ich habe einige Personen die 'Lösungsmethode' für die Würfel finden sehen, wie Herrn de Méré, der mir übrigens diese Probleme vorgelegt hat, und auch Herrn de Roberval,“ schreibt Pascal in seinem Brief vom 29. Juli 1654 an Fermat. Die Lösung dieses ersten Problems scheint weniger bekannt geworden zu sein als die des zweiten (s.a. Anmerkung 4). Im Zitat von Leibniz aus Abschnitt 2 wird nur das zweite Problem erwähnt.

Le problème des partis

„Aber Herr de Méré hat niemals den richtigen Wert beim Spielabbruch und auch keinen Ansatz, um dahin zu gelangen, finden können, so daß ich mich für den einzigen hielt, dem dieses Verhältnis bekannt war“, fährt Pascal im soeben erwähnten Brief vom 29. Juli 1654 an Pierre de Fermat fort. Beide, Pascal und Fermat, haben unabhängig voneinander die Lösung des Problems der Gewinnverteilung nach Spielabbruch gefunden und einander mitgeteilt. Dieses Problem, auch „force majeure“ oder „problème des points“ in der Literatur genannt, kann folgendermaßen formuliert werden:

Zwei Personen spielen eine Reihe von Spielen, in denen es kein Unentschieden, nur den Sieg eines der beiden Spieler gibt. Beide haben bei jedem Spiel gleiche Chancen auf den Gewinn. Sie vereinbaren, daß derjenige, der zuerst eine bestimmte Anzahl k dieses Spiels gewinnt, Gewinner der Partie ist und den gesamten Einsatz erhält. Stellen wir uns vor, daß die Partie beim Stand von $a{:}b$ abgebrochen werden muß, bevor einer der beiden Spieler k Gewinne hat. Wie soll beim Abbruch der gesamte Einsatz auf die beiden Spieler verteilt werden?

Stellen wir uns vor, daß 6 Gewinnpartien vereinbart worden sind und es 5:3 beim Abbruch steht. Pascal und Fermat denken sich die Partie nach den bereits ausgeführten 8 Spielen mit 3 weiteren Spielen fortgesetzt. Spätestens nach diesen 3 Spielen fällt die Entscheidung über den Sieger. Die Prämie soll im Verhältnis der Chancen auf den Gewinn der Partie aufgeteilt werden. Wir können die Situation in einem Baumdiagramm darstellen. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für den zurückliegenden Spieler R beträgt 0,125 = 1/8, für den führenden Spieler V aber 0,875 = 7/8. Die Prämie muß also im Verhältnis 7:1 für den mit 5:3 führenden Spieler V aufgeteilt werden.

Dem Herzog von Roannez werden weitere Aufgaben zugeschrieben, die in seinem Gesprächskreis diskutiert wurden. Auch mit ihrer Behandlung wurden die Grundlagen für stochastisches Denken gelegt. Eine Aufgabe habe ich in Abschnitt 1 erwähnt. Aber vor allem mit der Lösung des zweiten Problems, dem Problem der Gewinnverteilung nach Spielabbruch, wird die Geburt der Stochastik verbunden. Hier beginnt ein Denken in neuen, noch nicht vorgezeichneten Bahnen.

3. Zur Vorgeschichte

In Abschnitt 2 wurden die Lösungen der Probleme mit Darstellungsmöglichkeiten unserer Zeit vorgestellt. Damals waren weder die Darstellung mehrstufiger Zufallsversuche in Baumdiagrammen noch die Regeln zur Berechnung von Ereigniswahrscheinlichkeiten bekannt, geschweige denn gab es eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit in unserem Sinn. Auch waren diese Probleme nicht neu. Lösungen wurden bereits vorher diskutiert. Das soll nun dargestellt werden.

Le problème des dés

Betrachten wir zuerst den Fall, daß man mit einem Würfel würfelt. Das für den Spieler günstige Ereignis E sei das Werfen einer „6". Die Frage lautet: „Wie oft muß ich mindestens würfeln, damit eine Wette auf das Ereignis E aussichtsreicher ist als eine Wette auf das Gegenereignis ?" Dies kann man aus dem Verhältnis der Anzahl der für den Spieler günstigen und der für ihn ungünstigen Spiele erkennen. Dieser Sachverhalt wird in der folgenden Tabelle dargestellt:

Anzahl Würfe	günstig	ungünstig	alle Möglichkeiten
1	1	5	6
2	11	25	36
3	91	125	216
4	671	625	1296

Dem Kanzler der Kathedrale von Amiens, Richard de Fournival (1201 - 1260), wird das Gedicht „De Vetula" zugeschrieben (Barth/Haller, S. 72; Ineichen 1996, S. 55). Dieses Gedicht wurde anonym veröffentlicht. Es handelt sich um die erste umfassende mathematische Behandlung von Würfelspielen. In einer fingierten Autobiographie von Ovid, den Autor nennt man auch Pseudo-Ovidius, werden die Probleme und deren Resultate in lateinischen Hexametern angegeben. In dieser Schrift sind alle 216 Möglichkeiten, die beim Würfeln von 3 Würfeln entstehen, aufgeführt. Auch der interessierte Laie kann durch einfaches Abzählen 91 für unsere Wette günstige und 125 ungünstige Möglichkeiten bestimmen.

1559 behandelte der Mönch Jean Buteo (1492 - 1572) in seiner Schrift „Logistica" (s.a. Barth/Haller, S. 72), die um 1560 erschienen ist, Kombinationsschlösser und zeigt, „was bisher noch niemand angepackt hat", daß sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 auf genau $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ Arten kombinieren lassen. Er stellt alle Kombinationen in einer Tabelle dar. Auch hier kann der interessierte Laie durch einfaches Abzählen 671 für unsere Wette günstige und 625 ungünstige Möglichkeiten ermitteln.

Es gibt eine zweite elementare Lösungsstrategie für das Bestimmen der Chancen bei einer solchen Wette: Es gibt insgesamt 6^n Möglichkeiten, davon sind $6^n - 5^n$ für die Wette günstig und 5^n ungünstig. „Von welcher natürlichen Zahl n an ist $6^n - 5^n > 5^n$?", lautet also die Frage. Diese Strategie ist für die Bestimmung einer Lösung bei der Wette zum Würfeln mit 2 Würfeln und dem Erwarten einer Doppelsechs von Bedeutung: Hier gibt es bei n Versuchen 36^n Möglichkeiten, davon sind $36^n - 35^n$ für die Wette günstig und 35^n ungünstig. Hier lautet die Frage: „Von welcher natürlichen Zahl n an ist $36^n - 35^n > 35^n$?“ Es ist $P(E) = 0{,}491$ für $n = 24$, während für $n = 25$ $P(E) = 0{,}505$ beträgt. Möchte man nachvollziehen, wie die Lösung dieser Ungleichung ohne Benutzung eines Taschenrechners oder eines CA-Systems ermittelt worden ist, muß man berücksichtigen, daß Logarithmen seit 1614 in den Tafeln von John Napier (Neper) 7-stellig und in den Tafeln von Henri Briggs 14-stellig gedruckt vorlagen, zur Zeit von Pascal und Fermat also bereits bekannt waren.

Le problème des partis

Auch dieses Problem ist schon vor 1654 bekannt gewesen. In einem vermutlich um 1380 geschriebenen Manuskript (Übersetzung in Schneider 1988, S. 9/10), aufbewahrt in der Nationalbibliothek zu Florenz, findet sich die Lösung eines Spezialfalls des Teilungsproblems, die mit den Mitteln der cossistischen Algebra erzielt wurde (weiteres in Anmerkung 5). Der Lösungsansatz stützt sich auf das Prinzip, daß der mögliche Zugewinn für jeden der beiden beteiligten Spieler im Falle eines Einzelspielgewinns gleich sein muß. Im Anfangsteil des Manuskripts wird eine Gleichung unter Verwendung einer Variablen aufgestellt. Im Schlußteil wird diese Gleichung mit anschaulich beschriebenen Umformungsregeln aufgelöst, wobei man als Lösung sogar einen Bruch erhält. Leider steht diesen Vorzügen auch eine große Schwäche entgegen: Im Mittelteil werden offensichtlich die Spieler verwechselt. Aber auch nach Korrektur ist die Argumentation des Mittelteils schwer in Einklang mit der in den anderen Teilen des Manuskripts zu bringen.

Die zweite uns überlieferte Lösung stammt von Fra Luca Pacioli und ist sehr bekannt geworden. In der Anlage wird ein Auszug als Dokument 1 abgedruckt. „Er teilte einfach die Einsätze im Verhältnis der von den beteiligten Parteien gewonnenen Einzelspiele auf. Das entsprach der Aufteilung von Gewinn und Verlust im Verhältnis der Anteile der zu einer Handelskompagnie gehörenden Kaufleute. Jedoch blieb dabei die später als entscheidend erkannte jeweilige Anzahl der zum Gesamtgewinn noch erforderlichen Spiele unberücksichtigt. Daher wurde seine Lösung im 16. Jahrhundert als dem gesunden Menschenverstand widersprechend diffamiert.“ (Ivo Schneider, zit. in Scholz 1990, S 236/7)

Geronimo Cardano und Nicoló Tartaglia waren es, die die Lösung von Fra Luca Pacioli kritisierten. Cardano war ein leidenschaftlicher Spieler. Er schrieb 1563 das wohl älteste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung „De ludo aleae“, das aber erst 1663 in Lyon gedruckt wurde. Seine Kritik an Pacioli wurde aber bereits 1539 in Mailand veröffentlicht. Ein Auszug daraus wird als Dokument 2 in der Anlage vorgestellt. Für Cardano war nur noch die Anzahl der zum Gewinn erforderlichen Spiele interessant. Sein Lösungsansatz wird in Dokument 3 in der Anlage abgedruckt, eine ausführliche Kommentierung der Cardanoschen Lösung findet man bei Scholz 1990 (S. 239).

Nicoló Tartaglia kennt man nur unter seinem Spitznamen „Tartaglia - der Stotterer“, sein richtiger Nachname war vermutlich Fontana. Tartaglia gibt den Anspruch auf eine mathematische Lösung auf und behauptet statt dessen, das Problem könne eher juristisch als mit Vernunft gelöst werden. Interessant in dem als Dokument 4 in der Anlage abgedruckten Schriftstück ist, daß Tartaglia trotzdem eine eigene Lösung vorlegt, sie aber mit der Bemerkung abwertet, sie sei „am wenigsten anfechtbar“.

1559, also 2 Jahre nach Erscheinen von Tartaglias Beitrag, veröffentlichte Giobattista Francesco Peverone eine Schrift „Due brevi e facili trattati, il primo d'Arithmetica, l'altro di Geometria“, in der auch das Problem der abgebrochenen Partie behandelt wird. Peverone gelangt zur Aufteilung des Einsatzes im Verhältnis 6:1. Folgt man Ineichen 1986, dann stolpert Peverone über seine eigene richtige Regel und verpaßt so das folgerichtige Ergebnis 7:1, das heute meist als korrekte Lösung des Teilungsproblems angesehen wird. In der Schrift soll es erste Ansätze stochastischen Vorgehens geben, wobei jedoch Fragen bezüglich der Interpretation und Bewertung von Peverones Leistung bleiben (s.a. Anm. 8).

Die italienischen Mathematiker verloren um die Mitte des 16. Jahrhunderts die Überzeugung, daß es eine „richtige“ mathematisch ermittelbare Lösung des Teilungsproblems gibt, eine Überzeugung, die bei Luca Pacioli noch ganz ungebrochen war (ich folge hier Scholz 1990, S. 238 und S. 240). Diese Überzeugung erlangten die Mathematiker erst im 17. Jahrhundert wieder, vor allem unter dem Einfluß von Viète und Descartes. Man glaubte damals, mit der Buchstabenrechnung die schon von den griechischen Mathematikern gesuchte universelle Lösungsmethode für jedes mathematische Problem gefunden zu haben. Darauf, daß verschiedene Lösungswege des Teilungsproblems zum selben Ergebnis führen, weist im Brief von Pascal an Fermat vom 29. Juli 1654 das berühmte Wort hin, „daß die Wahrheit in Toulouse und in Paris dieselbe ist“. Siehe auch das Dokument 5 in der Anlage. In der Literatur wird darauf hingewiesen, daß weder Pascal, Fermat oder Huygens auf die Lösungen der Italiener zurückgreifen, obwohl man annimmt, daß sie diese Lösungen gekannt haben, sondern sich als diejenigen betrachteten, die als erste die richtige Lösung vorlegten (s.a. Anmerkung 7).

Leibniz hatte während seines Parisaufenthalts durch Abbé des Billettes vom Problem der Gewinnaufteilung nach Speilabbruch gehört und den Nachlaß von Pascal eingesehen. Er kannte auch die Schriften von Huygens zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er formulierte 1678 in „De incerti aestimatione“ einen eigenen Lösungsvorschlag: Der Einsatz ist im Verhältnis

$$(k + a - 2b) : (k - a)$$

aufzuteilen, falls $a \geq b$ ist. Diese Arbeit existierte nur als Handschrift und wurde erst 1957 von Biermann und Faak veröffentlicht (s.a Anmerkung 8).

Die folgende Liste enthält die hier erwähnten Lösungen des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch für k Gewinnspiele, das beim Stand von $a : b$ abgebrochen wird:

Jahr	**Autor**	**Verteilung allgemein**	**Verteilung konkret**
1380	anonym		3 : 1 (7 : 1)
1494	Pacioli	$a : b$	3 : 1
1539	Cardano	$[1 + 2 + \ldots + (k - b)] : [1 + 2 + \ldots + (k - a)]$	6 : 1
1556	Tartaglia	$(k + a - b) : (k + b - a)$	6 : 2
1654	Pascal, Fermat	Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten	7 : 1
1678	Leibniz	$(k + a - 2b) : (k - a) \quad a \geq b$	5 : 1

Bei der konkreten Verteilung wird die Lösung für eine auf 4 Gewinnspiele vereinbarte Partie angegeben, die beim Stand von 3:1 abgebrochen wird. Auf eine Besonderheit der Handschrift aus dem Jahr 1380 muß hingewiesen werden. Die in der obigen Tabelle angegebene Lösung 3:1 bezieht sich darauf, daß der gesamte Einsatz auf die beiden Spieler verteilt wird. Die Handschrift enthält aber einen ganz anderen Verteilungsmodus als die übrigen Texte: Der mit 3:1 führende Spieler erhält seinen Einsatz zurück, es wird nur der Einsatz des anderen Spielers aufgeteilt. Legt man diesen Verteilungsmodus zugrunde, erhält man eine Aufteilung im Verhältnis 7:1. Diese Lösung erhalten rund 300 Jahre später auch Pascal und Fermat, die dabei jedoch einen für die Entwicklung der Stochastik richtungweisenden Weg einschlagen.

4. Eine Zeittafel zu den Anfängen der Stochastik

In der folgenden Tabelle wird eine zeitliche Chronologie einiger wichtiger Schriften zur Stochastik vorgestellt. Glücksspiele scheinen zu den ältesten Spielen unserer Zivilisation zu gehören. Schon aus dem alten Indien sind uns Belege überliefert. Aber in einem sind sich die Historiker einig: Man findet viele Begriffe und Überlegungen, die im Umfeld eines modernen stochastischen Begriffs oder einer modernen stochastischen Überlegung sinnvoll interpretiert werden können, eine Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde im Altertum nicht entwickelt (s.a. Anm. 9).

In der Tabelle sind die ersten uns überlieferten Dokumente seit dem 13. Jahrhundert angegeben. Wer sich damals mit Glücksspielen beschäftigen wollte, mußte mit zwei großen Schwierigkeiten rechnen:

- Zum einen stand die zum Dogma gewordene Aussage von Aristoteles, daß der Bereich des Zufälligen menschlicher Erkenntnis, also auch wissenschaftlicher Methode, grundsätzlich nicht zugänglich sei, einer Behandlung von Zufallsphänomenen als unüberwindlich erscheinendes Hindernis entgegen.
- Zum anderen mußte das kirchliche und staatliche Glücksspielverbot beachtet werden.

Wie diesen rechtlichen oder philosophischen Randbedingungen entsprochen wurde, verraten die Texte der damaligen Zeit. „De Vetula“ wird „antik geschönt“ und als Autobiographie von Ovid ausgegeben, der Mönch Jean Buteo beschäftigt sich mit der unverfänglichen Frage nach der Anzahl von verschiedenen Kombinationsschlössern, deren Lösung auch praktischen Nutzen verspricht. Und gerade bei Jean Buteo wird widersprüchliches deutlich: Er bildet nicht die 1296 verschiedenen Schlösser oder die zugehörigen Schlüssel ab, was man wohl erwarten sollte. Er gibt statt dessen alle möglichen Ergebnisse des Würfelns von 4 Würfeln an und begibt sich mit dieser Modellierung in ein Gebiet, das für ihn gefährlich werden könnte. Noch deutlicher wird die Vermeidung des Zufalls bei der Behandlung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch. Da ist zum Beispiel von Schachpartien, einem harmlosen Ballspiel oder einem Ertüchtigung versprechenden Armbrustschießen die Rede, wobei die Gewinnchancen der beteiligten Parteien stillschweigend als gleich vorausgesetzt werden. Die Möglichkeit zu einer mathematischen Behandlung suchte man durch die Anlehnung an durch das Handelsrecht abgesicherte Wirtschaftsmodelle zu erzwingen und als Aufteilung von Gewinn und Verlust auszugeben.

Jahr	**Veröffentlichung**	**Besonderheit**
1250	Pseudo-Ovidius: De Vetula	216 Fälle bei 3 Würfeln
1380	Handschrift aus der Nationalbibliothek in Florenz	Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch
1494	Fra Luca Pacioli: Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita. Venedig	Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch
1539	Hieronymus Cardanus: Practica arithmetice et mensurandi singularis. Mailand	Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch
1556	Nicoló Tartaglia: La Prima Parte del General Trattato di Numeri, et Misure. Venedig	Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch
1558	Giobattista Francesco Peverone: Due brevi e facile Trattati, il primo d'Arithmetica, l'altro di Geometria. Lyon	Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch mit stochastischem Ansatz als 6:1
1560	Jean Buteo: Logistica	1296 Fälle für 4 Würfel
1563	Hieronymus Cardanus: Liber de ludo aleae. Erst 1663 in Lyon gedruckt	benutzt die klassische Berechnung für die Wahrscheinlichkeit
1654	Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat	Geburt der Stochastik
1657	Christiaan Huygens: Van Rekening in Spelen van Geluck. De Ratiociniis in Ludo Aleae. Amsterdam	Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundbegriff ist der Erwartungswert
1662	Antoine Arnauld: La logique ou l'art de penser. Paris	Grade der Wahrscheinlichkeit
1662	John Graunt: Natural and Political Oberservations mentioned in a following Index made upon the bills of mortality. London	Chancenrechnung und Sterbetafeln

1665	Gottfried Wilhelm Leibniz: De conditionibus.	Wahrscheinlichkeiten in der Rechtsprechung als Zahlen zwischen 0 und 1
1671	Johan de Witt: Waerdye van lyfrenten naer proportie van losrenten. Den Haag	Chancenrechnung und Rentenprobleme
1678	Gottfried Wilhelm Leibniz: De incerti aestimatione. Handschrift, die erst 1957 von Biermann und Faak veröffentlicht wurde.	„Wahrscheinlichkeit als Grad der Möglichkeit“, Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch
1708	Rémond de Montmort: Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard. Paris	anonym veröffentlicht
1711	Abraham de Moivre: De Mensura sortis, seu. De Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortituito Pendentibus. London	Plagiatsstreit mit Montmort
1713	Jakob Bernoulli: Ars conjectandi. Basel. Hsg. von Nikolaus I. Bernoulli	„Wahrscheinlichkeit als Grad der Gewißheit“, Anwendung auf bürgerliche, sittliche und wirtschaftliche Verhältnisse
1718	Abraham de Moivre: The Doctrine of Chances. Or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play. London	Wahrscheinlichkeit als Quotient im Sinne der Laplace-Definition
1718	Galileo Galilei: Sopra le scoperte de i dadi. Florenz. Entstanden zwischen 1613 und 1623, wurde erst mit dem Gesamtwerk veröffentlicht.	Augensumme bei 3 Würfeln
1764	Thomas Bayes: An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. London	Aus einer a-priori-Verteilung eine a-posteriori-Verteilung bestimmen
1812	Pierre Simon de Laplace: Théorie analytique des probabilités. Paris	Erste vollständige Definition der (Laplace-) Wahrscheinlichkeit

Sollte man den Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung vielleicht schon bei Cardano ansetzen? Sein Buch „De Ludo Aleae“ ist faktisch das erste Buch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber es wurde erst 1663 gedruckt. Die Lücke von fast 100 Jahren nach Cardano in der Zeittafel bemerkenswerter stochastischer Arbeiten ist nicht zu übersehen. Es ist daher verständlich, daß man trotz positiver Würdigung der Leistung von Cardano (s. z.B. Glickmann 1990 und die dort genannte Literatur) die Geburt der Stochastik als eigenständiges Gebiet innerhalb der Mathematik erst im Jahr 1654 mit dem Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat ansetzt. „Der Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird mit einem langgezogenen Posaunenstoß von eindrücklicher Stärke angekündigt !“, so bezeichnet Ineichen (1986, S. 60) die im zweiten Teil der Zeittafel dargestellte Vielfalt an Veröffentlichungen. Und selbst eine fast 40 Jahre dauernde Pause nach der Arbeit von Johan de Witt kann diesen Eindruck nicht schmälern. Denn es folgen danach weitere Veröffentlichungen, in denen mit dem euphorischen Schlagwort von der „Wahrscheinlichkeit als Führer des Lebens“ versucht wird, mit Hilfe der neuen Ideen und Methoden eine erstaunliche Bandbreite an Anwendungen zu entwickeln.

„Wie kommt es, daß kurz nach 1650 fast gleichzeitig sowohl die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch die mathematische Statistik entstehen, obgleich Glücksspiele, Versicherungen, Bevölkerungsstatistiken schon lange bekannt waren?“ (Struik zit. nach Steinbring 1980, S. 12) Auf diese Frage gibt Ineichen (1996, S. 141) eine kurze Antwort: „Sie entstand eben dann, als die entsprechenden Fragen gestellt wurden: Fragen nach den Chancenverhältnissen bei Glücksspielen einerseits, Fragen nach der Möglichkeit, „probabilitas“ zu einem quantifizierbaren Begriff zu entwickeln, andererseits, und als die beiden Entwicklungen zusammentrafen.“

Für Aristoteles sind wahrscheinliche Sätze solche, die allen oder den meisten oder den Weisen wahr erscheinen, und auch von den Weisen wieder allen oder den meisten oder den angesehensten. Aufgrund der zum Dogma erhobenen Aussage von Aristoteles, der „Zufall sei für menschliche Überlegung unerkennbar“ sind Zufälliges und Wahrscheinliches voneinander getrennt. „Wahrscheinlich“ ist bloß das Attribut einer Meinung (opinio). Dies ist die Ausgangsposition bis ins Mittelalter hinein.

Im Rahmen der Glücksspielrechnung wurde das Konzept des Zufalls in einer Chancenverhältnis-Rechnung mathematisiert. Glücksspiele sind immer wieder bekämpft worden, vor allem von Theologen. Die Kaufleute standen der Scholastik und auch der Theologie nicht unbedingt nahe, so daß es nicht verwundert, daß in Rechenbüchern für Kaufleute ab Ende des 15. Jahrhunderts die ersten Lösungsversuche für Glücksspielprobleme auftauchen. Das Eingehen eines Risikos, zum Beispiel beim Kauf einer Getreideernte des kommenden Jahres oder beim Kauf einer Zeitrente, wird als vergleichbar einem Einsatz in einem Glücksspiel angesehen und immer mehr auch als moralisch erlaubt angenommen. Bereits bei Cardano ist der intuitiv klare Begriff des gerechten Spiels vorhanden, den Huygens wieder aufgreift. Darauf bauen andere auf, zum Beispiel Johan de Witt und Jakob Bernoulli. Dies ist der eine Strang, der im Zitat von Ineichen angesprochen wird.

Der andere Strang besteht im Bedeutungswandel des Wortes „probabilis“ zu einem quantifizierbaren Begriff. Eine Meinung wurde bis ins Mittelalter hinein als wahrscheinlich angesehen, wenn sie sich auf die Aussage einer Autorität stützen konnte. Nach Hacking (1975, insbesondere Kapitel 5) ist diese mittelalterliche Auffassung von „wahrscheinlich“ mit unserer heutigen auf eine überraschende Art verbunden: Wir müssen als Autorität auch die Natur akzeptieren und die Antworten dieser damals neu anerkannten Autorität auf unsere Fragen durch Experimente lesen lernen. Dies sagt und schreibt sich heute leicht. Aber welche Schwierigkeiten waren auf dem Weg zu dieser Auffassung zu überwinden, und wieviele Auseinandersetzungen, zum Beispiel der Probabilismusstreit zwischen Jansenisten und Jesuiten, in dem es nicht nur um wissenschaftlichen Fortschritt, sondern auch um Macht und Einfluß ging, hat es gegeben?

Probabilitas wird immer mehr zu einem Grad der Zustimmung entsprechend der Evidenz. Leibniz strebt für juristische Zwecke eine Graduierung der Wahrscheinlichkeit an. In der Logik von

Port Royal, die von Pascal maßgeblich mit beeinflußt wurde, wird darauf hingewiesen, daß nicht nur Gewinne und Verluste betrachtet werden müssen, sondern auch die zugehörigen Grade an Wahrscheinlichkeit. Glücksspiele habe ihre besondere Bedeutung darin, daß sie als Veranschaulichungen oder Modelle für andere Probleme dienen. Schließlich faßt Jakob Bernoulli Stochastik nicht nur als Glücksspielrechnung, sondern als Kunst der Vermutung auf. Abraham de Moivre identifiziert probabilitas mit der „Leichtigkeit des Eintreffens (ease of happening)“ bei Glücksspielen. Als 1818 E. S. Unger den „Calcul des Probabilités“ von S. F. Lacroix als Wahrscheinlichkeitsrechnung übersetzt, haben Wahrscheinlichkeit und Zufall endgültig auch im deutschsprachigen Raum zusammengefunden.

Die Veränderung auf der wissenschaftlichen Ebene soll an einem Beispiel angedeutet werden: Pascal wiederholte 1646 das Experiment von Torricelli zum Luftdruck. Dieser Versuch widerlegt eine andere zum Dogma erhobene Aussage von Aristoteles, nach der ein luftleerer Raum aufgrund des horror vacui nicht möglich sei. Pascal steht in den Fragen der Wissenschaft ganz auf Seiten der experimentellen Methode und des vorurteilsfreien logischen Denkens. Das Vorwort über eine geplante, aber dann doch nicht ausgeführte, Abhandlung über den luftleeren Raum endet: „So können wir, ohne den Alten zu widersprechen, das Gegenteil von dem behaupten, was sie sagen; und welche Gestalt schließlich auch dies Altertum haben mag, die Wahrheit, selbst wenn sie neuerdings entdeckt ist, muß stets den Vorrang haben, zumal sie stets älter ist als alle Meinungen, die man darüber gehabt hat, und da es ein großes Verkennen der Natur wäre, wollte man glauben, sie habe zu jener Zeit angefangen zu existieren, als sie anfing, entdeckt zu werden." (zit. nach Rényi 1969) Mit dem Gegensatz Wahrheit versus Meinung (opinio) wird der Boden deutlich, auf dem nun wissenschaftlich gearbeitet wird. Und nicht vergessen werden darf auch das neue Selbstbewußtsein, das die Mathematiker seit Descartes und Viète beflügelt.

5. Zur Einbettung in den Unterricht

Wer Informationen über die Entwicklung der Stochastik in den Unterricht einbringt, wie sie zum Beispiel das Schulbuch von Barth und Haller bringt, kann meist mit regem Interesse auf Seiten der Lernenden rechnen. Eine gute Ergänzung stellt das „Lexikon bedeutender Mathematiker“ (Gottwald 1990) dar. Auch der Versuch, alte Aufgaben im neuen Gewand zu behandeln, kann zu einem lebendigen Mathematikunterricht führen. Zwei Unterrichtsreihen hierzu werden in Aufsätzen des Verfassers vorgestellt (Wirths 1997a und 1997b). Jeder Lehrende kann unterschiedliche Schwerpunkte bei der Integration historischer Elemente setzen, es gibt noch vieles zu erproben und zu entdecken. Daher möchte ich nur einiges andeuten. Meine Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeiten unserer Zeit bei der Behandlung der historischen Probleme ausgenutzt. Aber plötzlich erwachte bei einigen ein Interesse, das schnell die gesamte Lerngruppe erfasste. Es kann durch die Frage „Wie wurde früher überhaupt gerechnet?“ dargestellt werden. Die Lernenden setzten viel Phantasie ein und machten interessante Vorschläge. Ein Beispiel dazu ist:

In Kapitel 2 wurde das Problem der Würfel (problème des dés) dargestellt. Beim Würfeln mit 2 Würfeln und der Wette auf das Auftreten einer Doppelsechs geht es um die Aufteilung der 36^n Möglichkeiten in $36^n - 35^n$ für die Wette günstige und 35^n ungünstige und um den Vergleich von $36^n - 35^n$ und 35^n. Die entscheidende Frage lautet: „Von welcher natürlichen Zahl *n* an ist $36^n - 35^n > 35^n$?“ Für dieses Beispiel seien Schüleräußerungen zusammengestellt, ohne Rücksicht darauf, ob damals so gerechnet worden ist oder nicht:

Es werden per Hand die Potenzen 36^n und 35^n durch fortwährendes Multiplizieren von 36 bzw. 35 ermittelt und bestimmt so experimentell die kleinste natürliche Zahl *n*, die die Ungleichung $36^n - 35^n > 35^n$ löst.

Als Abkürzung dieses Verfahrens wird fortwährendes Quadrieren von 36 bzw. 35 und Multiplizieren mit bereits gewonnen Potenzen genannt. Beispiel: $36^{24} = 36^{16} \times 36^8$.

Wir rechnen nur mit Potenzen von 35 und drücken 36^n durch

$$(35+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 35^k$$

aus. Daraus entwickelt sich eine interessante Frage für weitere Schülerforschungen: Waren der Binomische Satz und Binomialkoeffizienten bereits bekannt?

Wir zerlegen die Differenz $36^n - 35^n$ nach dem 3. binomischen Satz und erhalten zum Beispiel für $n = 24$:

$$36^{24} - 35^{24} = (36^{12} - 35^{12}) \times (36^{12} + 35^{12}) = (36^6 - 35^6) \times (36^6 + 35^6) \times (36^{12} + 35^{12}) =$$
$$(36^3 - 35^3) \times (36^3 + 35^3) \times (36^6 + 35^6) \times (36^{12} + 35^{12}).$$

Wir benutzen den Satz

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} \times b^k$$

und erhalten

$$36^n - 35^n = \sum_{k=0}^{n-1} 36^{n-k} \times 35^k$$

Wir formen äquivalent um und erhalten:

$$36^n - 35^n > 35^n \Leftrightarrow 36^n > 2 \times 35^n \Leftrightarrow \left(\frac{36}{35}\right)^n > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$

Wir bekommen zum Schluß eine Ungleichung, auf die wir bei unserem „modernen“ Lösungsweg auch kommen.

Von der Lerngruppe wird bei allen diesen Vorschlägen die Potenzbildung als langwieriger und fehleranfälliger Prozeß empfunden. „Warum hat der Chevalier de Méré sich an den Mathematiker Pascal gewandt? Konnte er das nicht selber rechnen?“ Es wirkt das Zitat aus Kapitel 2 vom klugen Kopf, der kein Mathematiker ist, nach. Der Versuch einer Antwort war für mich aufschlußreich. Dem mathematisch interessierten Laien trauen die Lernenden die bisher erwähnten Wege zu. Es wurde sogar darüber diskutiert, ob die Spieler bei diesen Spielen Protokoll geführt haben, gewissermaßen also Buch über Erfolg und Nichterfolg geführt und ihre Erfahrung aus der statistischen Auswertung gewonnen hatten.

Der Mathematiker aber solle nach Meinung der Lernenden in der Lage sein, einen einfachen Weg zu finden, der ohne Probieren folgerichtig zur Lösung führt. Schließlich findet ein Schüler in der Literatur, daß Logarithmentafeln bereits seit 1614 gedruckt vorlagen. Nun scheint der Lerngruppe die Lösung mit Hilfe von Logarithmen der wohl plausibelste Weg für einen Mathematiker zu sein. Ob Pascal nun die Ungleichung $36^n - 35^n > 35^n$ oder eine dazu äquivalente tatsächlich gelöst hat, oder ob er „nur" die Terme $24\times(\log 36 - \log 35)$ und $25\times(\log 36 - \log 35)$ berechnet und die Ergebnisse verglichen hat, ist ihnen letztlich gleichgültig. Es schmälert den Eindruck eines kurzen, eleganten Lösungswegs nicht.

Das auf der ersten Seite angeführte Zitat von Poisson provoziert geradezu zur Recherche über das Umfeld, in dem hier vorgestellten Probleme damals behandelt wurden. Aber auch andere Zitate bieten genügend Anlässe, sich mit der Historie vertraut zu machen. Daher besteht auch eine echte Chance zum fächerübergreifenden Unterricht.

Ich habe bewußt auch Formulierungen der Probleme ohne den Begriff der Wahrscheinlichkeit gewählt. Schließlich war dieser Begriff zu den Zeiten von Pascal und Fermat noch nicht gebräuchlich und hat sich erst langsam in unserem heutigen Sinn bis zu einer ersten Fixierung bei Laplace herausgeschält. Auch mit der Berechnung von Chancen läßt sich im Unterricht stochastisches Denken gut entfalten. Die Veranschaulichung von Wahrscheinlichkeit als Chance hat sich in meinem Unterricht als eine gute Möglichkeit bewährt.

Die in der Anlage abgedruckten Texte wurden bewußt unter dem Gesichtspunkt eines möglichen Unterrichtseinsatzes ausgewählt. Daher habe ich zum Beispiel auf die Wiedergabe des Textes von 1380 verzichtet, obwohl die Lektüre dieses Manuskripts im Anfangs- und im Schlußteil auch für Lernende reizvoll ist. Aber sowohl im Unterricht als auch in der Lehrerfortbildung hat sich der Gesamttext als sehr schwierig erwiesen. Man könnte dennoch diesen und auch noch andere Texte im Unterricht einsetzen. Als weitere lohnende Beispiele seien die Texte von Huygens genannt, die auf eine ganz andere Möglichkeit hinweisen, in die Stochastik einzuführen, als die bislang praktizierte. Wer sich dafür näher interessiert, dem sei Bentz 1983 und die dort genannte Literatur empfohlen.

Auch unter dem Gesichtspunkt der Modellierung ist vor allem das Problem der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch reizvoll. Folgende Modellierungen lohnen:

a) Der Führende erhält seinen Einsatz zurück, der andere Einsatz wird verteilt (entspricht dem Text von 1380)

b) Der gesamte Einsatz wird verteilt.

c) Es werden unterschiedliche Kriterien für eine gerechte Verteilung erarbeitet.

Gerade der letzte Gesichtspunkt zeigt gute Möglichkeiten für einen lebendigen Unterricht auf. Wir müssen ernsthaft überlegen, ob wir nicht zu einer Auffassung zurückkehren, daß es keine eindeutige Lösung des Problems der abgebrochenen Partie gibt, sondern eine, die der jeweiligen Auffassung von einer gerechten Verteilung am meisten entspricht. Hier leisten die Aufsätze von Struve 1996, Ulshöfer 1997 und Schmidt 1998 wertvolle Hilfe und bieten viele Anregungen.

Es gibt vielfältige Möglichkeiten für Referate aus dem Themenkreis zur Geburt der Stochastik, die den Unterricht beleben können. Es können ebenfalls Themen für die neuerdings in Niedersachsen diskutierte Facharbeit diesem Problemfeld entnommen werden. Dabei müssen sich die Themen nicht nur auf die Geburt der Stochastik beschränken, es lohnt auch, über die Ausschärfung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs oder die Veränderungen im wissenschaftlichen und philosophisch-erkenntnistheoretischen Bereich zu berichten, oder der Frage nachzugehen, wie Zufall und Wahrscheinlichkeit zusammen kamen.

6. Abschlußbemerkungen

„Jeder muß im Laufe seines Lebens mehr oder weniger den ganzen Ablauf der kulturellen Entwicklung der Menschheit rekapitulieren." Dieser Satz des Nobelpreisträgers für Medizin des Jahres 1963, des Neurophysiologen John C. Eccles darf nicht so aufgefaßt werden, daß unsere Schülerinnen und Schüler immer nur den letzten und neuesten Stand der Wissenschaft erfahren, in Nebensätzen einige wenige, vielleicht auch abwertende, Hinweise auf ältere Modelle oder Denkweisen. Schließlich muß das „spannende Ringen", das Otto Toeplitz (1949) in seinem schönen Wort über die Entwicklung der Infinitesimalrechnung geschrieben hat, das aber auch für jedes andere Gebiet der Mathematik Gültigkeit besitzt, in unserem Unterricht zu spüren sein.

Wer versucht, historische Bezüge in seinen Unterricht zu integrieren und dabei Stochastik nicht aus dem Wege geht, wird erfahren, wie berechtigt ein Wort von Rudolf Haller (1988, S. 262) ist: „Dabei eignet sich die Stochastik mehr als jedes andere Teilgebiet der Mathematik dazu, Geschichte der Mathematik dem Schüler nahezubringen und andererseits den Unterricht aus der Geschichte heraus zu gestalten. Im Gegensatz zur Algebra oder gar der Analysis sind nicht nur stärker als dort die Fragestellungen der großen Mathematiker Gegenstand des Unterrichts, sondern der Schüler muß heute noch vielfach den gleichen Weg gehen, den die Großen gegangen sind, um eine Aufgabe zu lösen. Der Pulsschlag jener vergangenen Zeit ist heute immer noch zu fühlen. Darüber hinaus liegen der Stochastik so offensichtlich viele Probleme des Alltags jeder Zeit zugrunde, daß ihre geschichtliche Einbettung von selbst gegeben ist. Und da Stochastik - gelegentlich verächtlich als Würfelbudenmathematik abgetan - den homo ludens in uns anspricht, enthält sie ein Stück Kulturgeschichte der Menschheit."

Literatur

Barth, F.; Haller, R. (1992): *Stochastik Leistungskurs.* München: Ehrenwirth.

Bentz, H.-J. (1983): Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff von Chr. Huygens. - In: *Didaktik der Mathematik* **11**, 76-83.

Gerhard, C.I. (Hsg.) (1875-1890): *Die philosophischen Schriften von G.W. Leibniz.*

Glickman, L. (1990): Cardano - mehr als bloß ein Glücksspieler. - In: *Stochastik in der Schule* **10**, Nr.1, 47-52.

Glickmann, L. (1996): Isaac Newton - Der moderne statistische Berater. - In: *Stochastik in der Schule* **16**, Nr. 2, 3-6.

Gottwald, S. (1990): *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Leipzig: Bibliographisches Institut.

Hacking, Ian(1975): *The Emergence of Probability.* Cambridge: Cambridge University Press.

Haller, R. (1988): Zur Geschichte der Stochastik, - In: *Didaktik der Mathematik* **16**, 262-277.

Haller, R. (1995): Permutation, Kombination, Variation. - In: *Didaktik der Mathematik* **23**, 310 - 319.

Haller, R. (1997): Zog Pepys falsche Schlüsse? - In: *Stochastik in der Schule* **17**, Nr. 3, 49-54.

Hecht, H. (1992): *Gottfried Wilhelm Leibniz.* Stuttgart: Teubner.

Henze, N. (1998): Die Auflösung eines Wartezeit-Paradoxons -oder- Newton hatte nur teilweise recht! - In: *Stochastik in der Schule* **18**, Nr. 1, 2-4.

Ineichen, R. (1986): „Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewißheit ...“. Rückblick auf die Vorgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: *Bulletin Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles* **75** (1/2) 59-93.

Ineichen, R. (1990): Modellbildung von Zufallsphänomenen im Laufe der Geschichte. - In: *Der Mathematikunterricht* **36**, Nr. 6, 41-49.

Ineichen, R. (1995): Zur Geschichte einiger grundlegender Begriffe der Stochastik. - In: *Didaktik der Mathematik* **23**, 1-17.

Ineichen, R. (1996): *Würfel und Wahrscheinlichkeit.* Heidelberg: Spektrum.

Ineichen, R. (1997): Astragale, Würfel und Wahrscheinlichkeit in der Antike. - In: *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption,* Trier: Wissenschaftlicher Verlag Trier, 7-24.

Kendall, M. G. (1956): Studies in the history of probability and statistics II. - The beginning of a probability calculus. - In: *Biometrika* **55**, 1-14.

Meschkowski, H. (1968): *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Mannheim: BI.

Rényi, A. (1969): *Briefe über Wahrscheinlichkeit.* Basel: Birkhäuser.

Schneider, I. (1988): *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933* - Einführungen und Texte, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Scholz, E. (1990): *Geschichte der Algebra.* Mannheim: BI.

Schmidt, G. (1998): Experimenteller und anschaulicher Stochastikunterricht um das „Problem der abgebrochenen Partien“. - In: *Stochastik in der Schule* **18**, Nr. 1, 17-42.

Steinbring, H. (1980): *Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.* Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht. Bielefeld: IDM.

Struve, H. (1996): Zufall und Gerechtigkeit. - In: *Berichte aus dem Seminar für Didaktik der Mathematik* SS 95/96 und SS 96, Bielefeld: Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, 88-101.

Székely, G. (1990): *Paradoxa.* Frankfurt/Main: Harri Deutsch.

Toeplitz, O. (1949): *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.* Unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1949. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1972.

Ulshöfer, K. (1997): Es gibt nicht immer nur eine Lösung. - In: *Mathematik in der Schule* **35**, 24-29

Wirths, H. (1997): Das abgebrochene Tennis-Endspiel - Erste Erfahrungen in Stochastik. - In: *Mathematik in der Schule* **35**,143-158.

Wirths, H. (1997): Das abgebrochene Tennis-Endspiel - Erste Erfahrungen mit Baumdiagrammen. - In: *Mathematik in der Schule* **35**, 395-406.

Wussing, H./ Arnold, W. (1989): *Biographien bedeutender Mathematiker.* Köln: Aulis.

Anmerkungen:

1. Mit Jansenist bezeichnete man einen Anhänger der reformkatholischen Bewegung, die von Cornelis Jansen (1585 - 1638), dem Bischof von Ypern, ausging. Der Jansenismus betonte strenge Moralgrundsätze und stand mit seiner Lehre vom unfreien Willen des Menschen und von der Prädestination gegen die von den Jesuiten vertretenen Glaubensgrundsätze. Vom Standpunkt der Stochastik war der sogenannte Probabilismusstreit mit den Jesuiten bedeutsam. Port Royal, 1204 als Frauenkloster gegründet, wurde 1636 zum geistigen und kulturellen Zentrum des Jansenismus. 1664 begann die Jansenistenverfolgung in Frankreich. Port Royal wurde 1712 zerstört.

2. Die Formulierung „Geometria aleae" aus Pascals lateinischem Text kann auch als „Mathematik des Würfels" oder „Mathematik des Würfelspiels" übersetzt werden. Meiner Meinung drückt die Übersetzung „Mathematik des Zufalls" mehr das staunenerregende Faktum aus, daß entgegen der zum Dogma erhobenen Aussage des Aristoteles, der Bereich des Zufälligen sei menschlicher Erkenntnis, also auch wissenschaftlicher Methode, nicht zugänglich, von Pascal eine wissenschaftliche Darstellung aus dem Bereich des Zufälligen vorgelegt werden soll. Die Übersetzung entspricht zudem der Formulierung aus Pascal „Œvres Complètes", in der auf Seite 1403 von der „géométrie du hasard" die Rede ist.

3. Der Fehlschluß von Chevalier de Méré geht vermutlich schon auf Cardano (siehe bei Barth/Haller, S. 71 oder Hacking 1975, S. 60) zurück. Mit seinem Denken in Proportionalitäten hätte der Chevalier beinahe Recht gehabt. Abraham de Moivre (1657 - 1754) wies in seinem 1718 erschienenen Buch ‚Doctrine of Chances' nach, daß die „Proportionalitätsregel der kritischen Zahlen nicht weit von der Wahrheit entfernt ist." (Zitat nach Székely 1990, S. 15.) Approximiert man in der Ungleichung

$$n > \frac{\ln\ 0{,}5}{\ln\ (1-p)}$$

den Term $\ln(1\text{-}p)$ durch eine Potenzreihe, erhält man die Lösung

$$n > \frac{\ln\ 2}{p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} + \ldots}$$

Für kleine Wahrscheinlichkeiten p können im Nenner alle Summanden vom zweiten an vernachlässigt werden und wir erhalten als Näherungslösung $n > \ln 2 / p$. Ermittelt man die reellen Lösungen x der Gleichung $(1 - p)^x = 0{,}5$, erhält man $x = \ln 2 / p$ als Näherungslösung. Nur in Bezug auf diese Näherungslösung sind x und p produktgleich, also umgekehrt proportional zueinander, während x und $1/p$ quotientengleich, also direkt proportional zueinander sind. Nur für die Näherungslösung ist de Mérés Schluß korrekt. Das Paradoxon zeigt aber, daß für $p = 1/6$ die Näherungslösung nicht brauchbar ist.

4. Die Lösung des problème des dés scheint weniger bekannt geworden zu sein als die des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch. Rund 40 Jahre nach dem Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat legt Samuel Pepys, der Vorsitzende der Royal Society in London, Isaac Newton unter anderen auch das problème des dés vor. Newton fand die richtige Antwort, mit der - so wird überliefert - Pepys ebenfalls nicht zufrieden war (s. auch Székely 1990, S. 17). Zu Proble-

men, die Newton von Pepys vorgelegt wurden, verweise ich auf die Aufsätze von Glickmann 1997, Haller 1997 und Henze 1998 und die dort angegebene Literatur.

5. Mit Cossist bezeichnet man die Rechenmeister des 15. und 16. Jahrhunderts, die besondere Symbole für Variable benutzten. Als Variable war c, eine Abkürzung für das italienische Wort cosa, die Sache, gebräuchlich. Daher rührt der Name Coss für die Variable und Cossist für den Anwender dieser Methode. Zu den bekannten Cossisten zählen Johannes Widmann, Christoph Rudolff und Michael Stifel.

6. Es sind nur zwei Exemplare von Peverones Schrift bekannt, ein Exemplar befindet sich in der Österreichischen Nationalbibliothek in Wien, ein anderes in der Bibliothek der Cornell University in Ithaca, New York. Leider gibt es bis heute keine Veröffentlichung der Textstellen zum Problem der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch, erst recht keine deutsche Übersetzung. In Ineichen 1986 findet man eine ausführliche Würdigung und Darstellung von Peverones Lösung. In der Literatur, zum Beispiel bei Ineichen 1986, Haller 1988, Hacking 1975, wird darauf hingewiesen, daß bei Peverone erstmals stochastisches Denken zu erkennen sei. Peverone macht einen Fehler und erhält als Teilungsverhältnis 6:1 und nicht 7:1."I think this must be one of the nearest misses in mathematics", kommentierte Kendall 1956 dies.

Wie spannend eine Beschäftigung mit diesem Text sein könnte, aber wieviel auch noch ungeklärt ist, zeigt ein Schreiben vom 26.11.1997 von Prof. Ineichen an den Verfasser, in dem es heißt: „In meinem Aufsatz ‚Die Wahrscheinlichkeit ist ...' (Ineichen 1986) habe ich wohl Peverone etwas überschätzt - verführt durch den Aufsatz von Kendall. Heute würde ich mich fragen, ob seine teilweise falsche Lösung des Teilungsproblems nicht einfach zeigt, daß er die Aufgabe nicht verstanden hat; natürlich ist auch dies nur eine Vermutung."

7. Ivo Schneider (1988, S. 3) schreibt: „Trotz der, wie im Fall von Cardano und Forestani, bis in die zweite Hälfte des 17. Jahrhunderts reichenden Veröffentlichungen dieser italienischen Tradition haben die drei eigentlichen Begründer der Glücksspielrechnung und Wegbereiter der Bernoullischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, Pascal, Fermat und Christiaan Huygens, diese ihnen in irgendeiner Form bekannten Leistungen der Italiener niemals erwähnt und sich selbst als die ersten ausgegeben, die die Verbindung zwischen Mathematik und dem Bereich des Zufalls herzustellen vermochten. Der Hauptgrund dafür ist sicherlich, daß der mit Viète und Descartes wieder in den Vordergrund gerückte Anspruch auf absolute Richtigkeit und Beweisbarkeit von mathematischen Aussagen die Lösungsvorschläge der Italiener für das Teilungsproblem, die nur als Meinungen angeboten worden waren, auf das Niveau der mathematischen Folklore sinken ließen. Diese Folklore wird in dem Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat von 1654 von dem Chevalier de Méré vertreten.

Zentrales Thema dieses Briefwechsels ist das Teilungsproblem, das zwar noch unter der Voraussetzung gleicher Gewinnchancen für die beteiligten Spieler, aber nun in größerer Allgemeinheit diskutiert wird." Als weitere Ausführungen zum Teilungsproblem sei die Darstellung von Schneider in Scholz 1990 auf den Seiten 236-240 empfohlen. Hacking schreibt, daß Chevalier de Méré lange Zeit als Erfinder des Teilungsproblems angesehen wurde, eine Aussage, die vermutlich auf Christiaan Huygens zurückgeht (s. Hacking 1975, S. 61). Daraus könnte man sogar schließen, daß die Leistungen der Italiener Pascal, Fermat und Huygens vielleicht doch unbekannt waren, mindestens aber, daß sie in Vergessenheit geraten sind.

8. Weitere Informationen findet man zum Beispiel in Ineichen 1988 und Struve 1996. „De incerti aestimatione"gibt wertvolle Aufschlüsse über das stochastische Denken bei Leibniz. Es finden sich außer der Auffassung von Wahrscheinlichkeit als „probabilitas est gradus possibilitatis" eine erste Anwendung des Erwartungswerts „spes" in der Form von „Hoffnung" („Spes est probabilitas habendi") und „Furcht" („Metus est probabilitas amittendi.") sowie einer Berechnung dieser Spes als Verhältnis der Zahl der günstigen Fälle („numerus eventuum qui favere possunt") und der Zahl der möglichen Fälle („numerus eventuum omnium"). Leibniz gibt in „De incerti aestimatione" eine andere Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch an als Pascal und Fermat, obwohl er deren Lösung kannte.

In Struve 1996 wird eine interessante Rechtfertigung des Vorgehens von Pascal und Fermat einerseits und Leibniz andererseits bei der Lösung des Problems der Gewinnaufteilung nach Spielabbruch entwickelt. Die Gerechtigkeitsvorstellung, die sich in der Lösung von Leibniz entdecken läßt, kann in Form eines Leistungsprinzips ausgedrückt werden: Jeder Sieg, der über ein Unentschieden hinausgeht, wird gleich entlohnt, also etwas vereinfachend dargestellt: „gleicher Lohn für gleiche Leistung". Für die Lösung von Pascal und Fermat läßt sich ein anderes Prinzip konstruieren: Der Wert einer Partie ist für Spieler A immer derselbe wie für Spieler B. In Struve 1996 wird bewiesen, daß in beiden Fällen das jeweilige Prinzip eindeutig die zugehörige Lösung charakterisiert.

9. In Ineichen 1996 wird eine Fülle von Informationen zu stochastischen Bezügen in der Antike gegeben. Aus dem alten Indien ist vor allem bemerkenswert die Erzählung von Nala aus dem Epos „Mahabharata", dessen Anfänge im 7. Jahrhundert vor Christus liegen, die auch Hacking anführt. Ansonsten sei auf die Arbeiten von Ineichen, Haller und Hacking sowie die dort angeführte Literatur verwiesen.

Zu den historischen Dokumenten gelangen Sie über die Kurzfassung.