Ist Problemlösen ein Lotterie-Spiel ?

Rex Watson
Homerton College, Cambridge, England
Übersetzung: Anke Strauß, Kronberg im Taunus

Zusammenfassung: Beim Zahlen-Lotto „6 aus 49" werden zufällig benachbarte Zahlen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Ausfall? Die Standard-Berechnung wird hier ergänzt durch einen neuen, ungewöhnlichen Lösungs-Gedanken.

Problemstellung

Das Lotto-Spielen hat vielleicht einen positiven Nebeneffekt, daß es nämlich zum Nachdenken über Mathematik anregt, wenngleich situationsbedingt und intuitiv. Jede Woche kann man den Ziehungsvorgang im Fernsehen verfolgen, und mancher, der sich die sechs Zahlen ansieht (den sog. „Bonus Ball" [in der britischen *National Lottery*, vergleichbar unserer Zusatzzahl] mal ignoriert), wundert sich, wie häufig gewisse auffallende Anordnungen in dieser Zahlenmenge vorkommen.

Natürlich kann man dieses Sich-Wundern als eine dubiose statistische Praxis ansehen; vielleicht denkt jemand auch idealerweise über die Chancen spezieller Ergebnis-Muster nach, *bevor* der Ziehungsvorgang gestartet wird ... Wie auch immer, manche Leute betrachten nun mal einige dieser Zahlenabfolgen als eigenartig oder ungewöhnlich und damit näherer Betrachtung wert.

Unter den als bemerkenswert einzustufenden Ziehungsergebnissen sind z.B. solche mit drei oder vier Zahlen in einer Dekade, etwa in den Vierzigern, oder einem Überwiegen von geraden resp. ungeraden Zahlen, oder dem Auftreten von mindestens einem Paar benachbarter Zahlen. Letzteres Beispiel wird im folgenden diskutiert, zusammen mit einer Möglichkeit der Erklärung der Formel zur Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeit.

Die Lösung

Als ich mich diesem Problem zuwandte, löste ich es schließlich mit großer Anstrengung unter Einbeziehung eines schrittweisen Aufbaus aller Möglichkeiten für das Gegenereignis, nämlich keine aufeinanderfolgenden Zahlen zu haben. (Wenn man sich mit einer kombinatorischen oder Wahrscheinlichkeits-Aufgabe auseinandersetzt, scheint es von zweitrangiger Bedeutung zu sein, in einem frühen Stadium zu entscheiden, ob das inverse Problem leichter zu bewältigen ist.) Es ist nicht meine Absicht, an dieser Stelle die direkte Lösungsmethode zu beschreiben, ich nenne sie einfach den „langen Weg".

Stochastik in der Schule 17(1997), Heft 2, S. 27-28
Übersetzung aus Teaching Statistics 18(Autumn 1996)3, S. 70

Die Antwort lautet $\frac{44!\cdot 43!}{38!\cdot 49!} \approx 0{,}5048$. Das heißt, benachbarte Zahlen treten im Schnitt alle zwei Wochen auf, wohl entgegen unserer intuitiven Vermutung. Das Auftreten der Fakultäten mag Auslöser sein für die Umformung zu $\frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}}$.

Anhand dieser Umformung können wir versuchen, eine kombinatorische Interpretation zu finden. Der Nenner berechnet natürlich die Anzahl aller möglichen verschiedenen Ziehungsergebnisse. Bleibt also die Frage, warum in aller Welt im Zähler „6 aus **44**" steht?

Der Trick ist, eine Eins-zu-eins-Beziehung herzustellen zwischen
a) den „6 aus 49"-Ausfällen ohne Auftreten von Nachbarn und
b) allen „6 aus 44"-Ausfällen.

Im folgenden zeigen wir den Weg von a) nach b) und zurück und damit die Ein-Eindeutigkeit dieser Beziehung.

Als Beispiel betrachten wir das zu a) gehörende Ziehungsergebnis 4,14,25,27, 33,47. Um diese Folge in eine solche „aus 44" zu transformieren, werden resp. die Zahlen 0,1,2,3,4,5, subtrahiert mit dem zu b) gehörenden Ergebnis 4,13,23, 24,29,42. Zunächst ist festzuhalten, daß die größte Zahl einer solchen Folge höchstens (49–5 =) 44 sein kann. Zweitens besteht nicht die Gefahr von Zahlenwiederholungen in b), da in a) nach Voraussetzung Nachbarn ausgeschlossen sind und man für b) jedes Mal 1 mehr subtrahiert als man sukzessive weitergeht. Der Prozeß ist reversibel: Beginnt man mit irgendeiner streng mononton steigenden Folge der Art „6 aus 44" und addiert jeweils 0,1,2,3,4,5, erhält man als letzte Zahl höchstens 49, und es werden niemals Nachbarn erzeugt, da stets 1 mehr addiert wird als man vorwärtsschreitet. Damit ist die gewünschte Eins-zu-eins-Beziehung zwischen Typ a) und Typ b) gezeigt.

Folgerung

Die gezeigte Methode, die Antwort zu erhalten, nenne ich den „kurzen Weg". Doch darf man ihn nicht als leichten Weg ansehen, denn er beinhaltet eine Rückschau. Man mag einwenden, daß es besser gewesen wäre, direkt und von Anfang an nach einem kurzen Weg zu suchen, doch kann denn die Existenz eines solchen vorausgesetzt werden? Ich denke, nein. Obgleich es stets angeraten ist, über eine kurze Lösung eines Problems nachzudenken, haben wir zu akzeptieren, daß, wenn es denn eine solche Lösung gibt, es nicht von vorneherein klar ist, wie man sie finden kann!

Anmerkung der Herausgeberin

Die Bälle jeder Dekade sind gefärbt (aufsteigend weiß, blau, rot, grün, gelb). Weitere interessante Stochastik-Aufgaben lassen sich daraus konstruieren. – Hier noch die Adresse der *UK National Lottery*-Homepage: http://lottery.merseyworld.com/, vgl. auch S. 40 in diesem Heft.