

Streuung - Mißt die Standardabweichung sie immer adäquat?

von Louis A. PINGEL, Pittsburgh; Übersetzung: Hans-Dieter SILL, Rostock

Zusammenfassung: Im Artikel wird ein Beispiel diskutiert, in dem vier verschiedene Datensätze mit unterschiedlichen Streuungsmustern die gleiche Standardabweichung besitzen. Es wird gezeigt, daß verschiedene Streuungsmaße zu unterschiedlichen Antworten auf die Frage nach der Datensatz mit der größten Streuung führen.

Einleitung

In Lehrbüchern zur angewandten Statistik enthält die übliche Sequenz zur Einführung der Streuung eine Diskussion des Streuungskonzeptes im allgemeinen sowie eine Angabe von verschiedenen Streuungsmaßen, einschließlich der Standardabweichung (und, dazu äquivalent, der Varianz). Einige der Erklärungen zur Charakterisierung der Streuung durch die Standardabweichung (z.B., je mehr sich die Werte vom Mittelwert unterscheiden, um so größer ist die Standardabweichung) werden häufig mit einer Verdeutlichung der Schritte zur Berechnung der Standardabweichung verbunden. Dann folgt gewöhnlich eine Erläuterung, wie ein ermittelter Wert der Standardabweichung im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen interpretiert werden kann. Abschließend wird meist darauf hingewiesen, daß die Standardabweichung das am meisten verwendete Streuungsmaß ist.

Eine mögliche Problemstellung

Bei dieser Art der Einführung der Streuung und der Standardabweichung verbinden viele Studenten die Streuung die Vorstellung einer symmetrischen und glockenförmigen Verteilung. Weiterhin folgern viele Studenten, daß die Standardabweichung die Streuung eines jeden Datensatzes adäquat mißt und deshalb die Streuung eines Datensatzes immer mit der Streuung eines anderen Datensatzes verglichen werden können, in dem die Standardabweichungen beider Datensätze verglichen werden.

Um zu versuchen, die Studenten vor solchen Schlußfolgerungen zu bewahren, kann die Abbildung in der Behandlung der Streuungsmaße einbezogen werden.

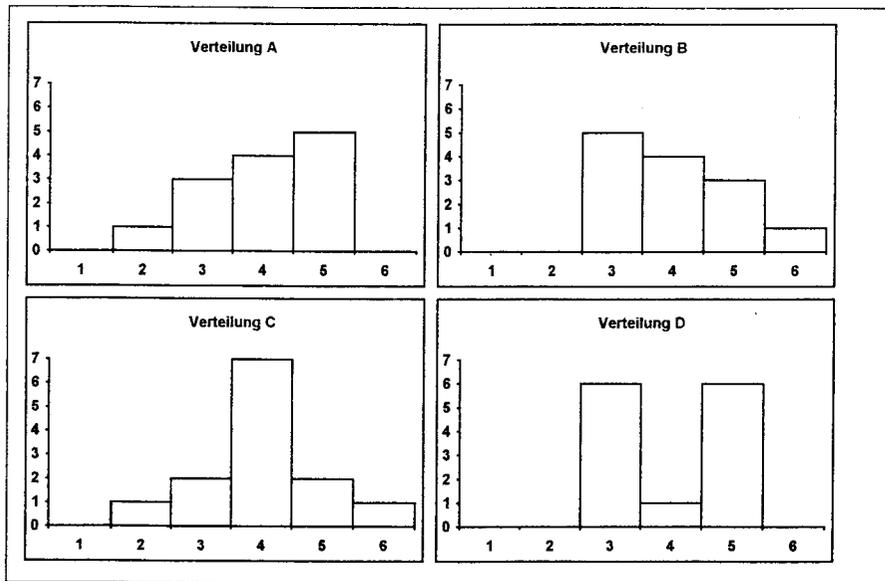


Abb. 1 Histogramme von vier Verteilungen

Die Abbildung 1 basiert auf einem geschickt konstruierten Beispiel von NITKO 1983 (S. 70). Es werden in Abb. 1 vier Häufigkeitsverteilungen vorgelegt, die als Ergebnisse von Erhebungen betrachtet werden können, ohne daß diese explizit angegeben sind. Die vier Häufigkeitsverteilungen können aus den Histogrammen gewonnen und einfach als „Verteilungen“ angesehen werden. Im Original von NITKO sind die Werte des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung für jede Verteilung enthalten, um hervorzuheben, daß sowohl die Mittelwerte als auch die Standardabweichungen für alle vier Verteilungen identisch sind; die Abbildung war überschrieben mit „Verteilungen mit gleichem Mittelwert und gleicher Standardabweichung können unterschiedliche Gestalt haben.“ Wie in der Überschrift zum Ausdruck kommt, sollen diese Verteilungen den Studenten bei der Einführung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung vorgelegt werden. Ergänzend dazu können die gleichen Verteilungen jedoch auch benutzt werden, um wichtige Aspekte der Streuungsmaße eingehender zu verdeutlichen.

Eine mögliche Lösung

Die Tabelle 1 enthält die Werte von vier verschiedenen Streuungsmaßen für die vier Verteilungen in Abb. 1. Die vier Streuungsmaße sind die Spannweite (SW), der Interquartilabstand (IQA), die mittlere absolute Abweichung vom Mittelwert (MAA) und die Standardabweichung (SA) der Stichprobe. (Anm. d. Verf.: Im Originalartikel werden die Bezeichnungen R (range), IQR (interquartile range), MAD (mean absolute deviation from the mean) und SD (sample standard deviation) verwendet). Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die Werte von SA für diese vier Verteilungen gleich sind, während sich die Werte von SW, IQA und MAA unterscheiden.

Streuungs- maße	Verteilung			
	A	B	C	D
SW	3.00	3.00	4.00	2.00
IQA	1.60	1.60	0.92	1.92
MAA	0.77	0.77	0.62	0.92
SA	1.00	1.00	1.00	1.00

Tab. 1 Werte von vier Streuungsmaßen für die vier Verteilungen in Abb. 1

Ausgerüstet mit der Kenntnis der Werte in Tab. 1 kann der Unterrichtende den Studenten Kopien der Abb. 1 in die Hand geben und eine lebhaftige Diskussion mit der Frage „In welcher der Verteilungen streuen die Werte am meisten?“ in Gang setzen. Vor Beginn der Diskussion könnte noch darauf hingewiesen werden, daß der Umfang jeder Stichprobe 13 und das arithmetische Mittel jeder Verteilung 4 beträgt.

Die Studenten antworten fast immer entsprechend ihren Grundvorstellungen von der Streuung - einige denken an Streuung im Sinne von Entfernung der Werte voneinander, andere in Sinne von Grad der Abweichung vom Mittelwert. Der Unterrichtende kann für die erste Gruppe der Studenten darauf hinweisen, daß sowohl SW als auch IQA Abstände sind. Während jedoch in der Verteilung C die Spannweite SW den größten Wert annimmt, ist der Wert von IQA für die Verteilung D am größten. Für die zweite Gruppe der Studenten kann der Unterrichtende

herausstellen, daß sowohl MAA als auch SA Abweichungen von Mittelwert beinhalten. Für die vier Verteilungen in Abb. 1 sind die Werte für SA identisch; die Verteilung D hat jedoch den größten Wert von MAA.

Während der Diskussion kann der Unterrichtende die Feststellung treffen, daß die betrachtete Frage für die Verteilungen in Abb. 1 nicht einfach dadurch beantwortet werden kann, indem ermittelt wird, bei welcher Verteilung ein Streuungsmaß den größten Wert hat. Für die Verteilungen in Abb. 1 müssen die Fragen „Welchen Verteilung hat die größte Spannweite SW?“ und „Welche Verteilung hat den größten Interquartilabstand IQA?“ unterschiedlich beantwortet werden, das betrifft ebenso die Fragen „In welcher Verteilung ist SA am größten?“ und „In welcher Verteilung ist MAA am größten?“.

An dieser Stelle könnte man das naheliegende Problem diskutieren, welche Auswirkungen Ausreißerwerte auf die Streuungsmaße haben. Als Beispiel könnte der Wert eines Ergebnisses in einer der Verteilungen in Abb. 1 geändert werden, um einen Ausreißerwert zu produzieren. Dann könnten die Werte der verschiedenen Streuungsmaße neu berechnet und mit den ursprünglichen Werten aus Tab. 1 verglichen werden. Dies sollte die Studenten zu der Verallgemeinerung führen, daß die Spannweite und im gewissen Grade die Standardabweichung sowie die mittlere absolute Abweichung empfindlich gegenüber Ausreißerwerten sind, während der Interquartilabstand dies nicht ist.

Schlußfolgerung

Am Ende sollte die Studenten verstanden haben, daß das Konzept der Streuung nicht präzise genug definiert werden kann, um es auf ein einzelnes Streuungsmaß zurückzuführen. Obwohl die Standardabweichung das verbreitetste Streuungsmaß ist, läßt sich die Frage nachdem Datensatz mit der größten Streuung nicht immer durch die Bestimmung des Datensatzes mit der größten Standardabweichung beantworten.

Literatur

NITKO, A. J., 1983: Educational Tests and Measurement: An Introduction. New York: Harcourt Brace Jovanovich