Proportionen und Produkte - Was können Studenten?

von Flavia JOLLIFFE, Greenwich und Fay SHARPLES, Waikato;

Übersetzung: Hans-Dieter SILL, Rostock

Einleitung

Es wird gelegentlich festgestellt, daß der Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einem einführenden Niveau nicht schwierig sei, da viele Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung lediglich Fragen zu Verhältnissen sind. Studenten bewältigen jedoch oft Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung in unbefriedigender Weise und eine Ursache dafür könnte eine mangelhafte Vertrautheit im Umgang mit Verhältnissen sein. Um dies zu untersuchen entwickelten wir einen Test mit 10 Fragen, die ein Verständnis von Proportionen erfordern. Unsere Studenten benötigten etwa 25 Minuten, um die Testfragen zu bearbeiten.

Der Test besteht aus einfachen Fragen zu Beginn, wie in Abb. 1 angegeben, und schwierigeren Fragen zum Ende hin. Die schwierigste Frage, die aufgenommen wurde, um ansatzweise herauszufinden, ob Studenten den Wahrscheinlichkeitsbegriff wirklich verstanden haben und die mit einer Skizze veranschaulicht wurde, bestand darin, die Wahrscheinlichkeit herauszufinden, mit der in Stapel von 4 Ziegelsteinen vor einem Stapel von 3 Ziegelsteinen die Höhe von 5 Steinen erreicht, wenn neue Steine zufällig auf einen der Stapel gelegt werden. Diese Aufgabe ist eine Version einer Aufgabe, die von Monks (1985) diskutiert wurde und am besten mit einem Baumdiagramm in Angriff genommen wird. Die Beantwortung aller Fragen, mit Ausnahme der in Abb. 3 gezeigten, war zeitlich nicht begrenzt.

Die Studenten wurden instruiert, die Antwort zu geben, von der sie **denken** und **fühlen,** daß sie richtig ist und mit „ich weiß nicht“ zu antworten, wenn sie fühlen, daß sie die Antwort nicht wissen. Bei allen Fragen wurden sie um eine kurze Begründung ihrer Anwort gebeten.

Original: Proportions and products - what do Students know?. In: Teach. Stat. 15(1993)3. S. 78 - 80

Die Untersuchung

Die Ausgangsuntersuchung wurde 1989 und 1990 durchgeführt; es nahmen 121 Studenten teil: 64 an der Universität von Waikato, Neuseeland, und 57 an der Brunel-Universität, Großbritannien. Alle Studenten waren zur Zeit der Testdurchführung am Beginn ihres Studiums. Das Ausfüllen des Fragebogens war freiwillig und die Namen wurden nicht erfaßt.

Alle Studenten in Waikato nahmen an einem Einführungskurs in Statistik teil. 28 von ihnen hatten bis zum 18. Lebensjahr Statistikunterricht, aber fast alle errichten bei den Prüfungen im letzten Jahr der Sekundarstufe in Neuseeland nur Noten unterhalb des Durchschnitts.

Sehr viele Studenten hatten nach dem 16. Lebensjahr Mathematikunterricht als Einzelfach. 26 Studenten in Brunel hatten sich für ein akademischen Grad auf mathematischem Gebiet eingetragen und besaßen gute Grundlagen aus der Schulmathematik, in vielen Fällen einschließlich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die 31 übrigen Studenten in Brunel waren Studenten der Materialkunde, die einen Einführungskurs in Stochastik belegten und von denen viele recht schwach in Mathematik waren.

Einige Resultate

Ungeachtet der Unterschiede in den mathematischen Voraussetzungen und Fähigkeiten, war die Streubreite der Antworten in den beiden Einrichtungen ziemlich ähnlich und die Antworten derjenigen, die sich in Mathematik spezialisieren, unterschieden sich nicht sonderlich von denen der anderen Studenten.

Obgleich es ein oder zwei Fragen gab, die die meisten Studenten richtig beantworteten, waren wir überrascht über die große Zahl falscher Antworten bei Fragen, die wir für sehr leicht hielten. In einigen Fällen lassen sich die falschen Antworten offensichtlich auf oberflächliches Lesen und Rechenfehler zurückführen, was an sich schon beunruhigend ist, aber wir fanden auch ein Reihe geradezu grundlegender Mißverständnisse, einschließlich offensichtlicher Mängel im Verständnis der Begriffe Abschätzung und Produkt.

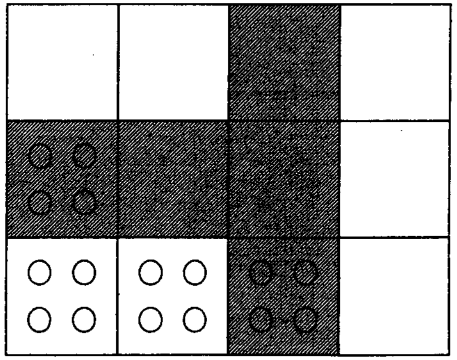
In diesem Artikel konzentrieren wir uns auf solche Fragen, bei denen die Antworten der Studenten unser besonderes Interesse fanden. Die Ergebnisse der Untersuchung wurden umfassender auf der Dritten Internationalen Konferenz zum Statistikunterricht vorgetragen (Jolliffe, Sharples, 1991)

suchung wurden umfassender auf der Dritten Internationalen Konferenz zum Statistikunterricht vorgetragen (Jolliffe, Sharples, 1991)

Die erste von uns gestellte Frage und die Verteilung der Antworten sind in Abb. 1 dargestellt. Jene, die mit 1/6 antworteten, gaben als Erklärung an, daß insgesamt 12 Quadrate vorhanden sind, von denen 5 schraffiert und von denen wiederum 2 mit Kreisen markiert sind. Entweder konnten diese Studenten nicht den richtigen Nenner des Verhältnisses auswählen oder sie dachten, daß im Diagramm der Anteil der sowohl schraffierten als auch mit Kreisen markierten Quadrate zu berechnen ist. Wir glauben, daß jene, die mit 1/3 und der Begründung antworteten, daß 4 der 12 Quadrate Kreise enthalten, die Frage nicht richtig gelesen haben. Wenn Studenten nicht in der Lage sind, diese Frage richtig zu erfassen, ob sie nun nicht sorgfältig gelesen haben oder nicht wissen, wie das Verhältnis zu finden ist, können wir dann erwarten, daß sie mit der bedingten Wahrscheinlichkeit zu Rande kommen?

Frage A

Welcher Anteil des schraffierten Gebietes im unteren Diagramm ist mit Kreisen markiert?



Antworten	Anzahl (in %) der Antworten
2/5*	91 (75)
1/6	14 (12)
1/3	12 (10)
5/12	2 (2)
andere	2 (2)
Gesamt	121 (100)

* richtige Antwort

Bemerkung:

Das in Brunel verwendete Diagramm besaß Kreuze. In der Version von Waikato wurde dies verändert, um einer Verwechslung zwischen den Begriffen „Kreuze“ und „Kreuzschraffierung“ zu vermeiden.

Abb. 1

Eine andere Frage, die völlig elementare aber wichtige Vorstellungen testen sollte, ist in Abb. 2 dargestellt, zusammen mit einer Übersicht über die Ergebnisse des numerischen Teils der Aufgabe.
Im Teil (a) haben 6 Studenten in Brunel und 13 Studenten in Waikato ihre (richtige) Antwort in der Form 28/40 belassen. Weil viele von ihnen den Teil (b) falsch beantworteten, glauben wir, daß das Nicht-Kürzen auf eine Unsicherheit im Umgang mit Zahlen hinweist.
Die falschen Antworten der Waikato-Studenten sind auf falsche Methoden und Flüchtigkeitsfehler im Kürzen zurückzuführen.
Im Teil (b) gaben 8 Brunel-Studenten und 5 Waikato-Studenten die Antwort 70% und 13 Studenten, alle außer einem aus Waikato, gaben die Antwort 50. Viele aus dieser letzteren Gruppe rechtfertigten ihre Antwort mit Argumenten zur Gleichwahrscheinlichkeit, d.h. daß sie entweder die Stichprobenergebnisse völlig ignorierten oder nicht sicher waren, was wir mit „Schätzung" meinten. Wir bemerkten, daß einige Studenten zu der Annahme tendierten, daß Ausgänge stets „gleichwahrscheinlich" sind, was auch immer gefragt wird.

Einige Studenten diskutierten sogar das in der Frage angegebene Versuchsergebnis weg; so sagte z.B. ein Student: „40 ist nur eine geringe Zahl, so daß das Verhältnis von 1:2 nicht zustande kam - bei 100 Würfen gleicht sich der Unterschied im Durchschnitt aus". Es gab noch eine Reihe weiterer fehlerhafter Antworten zum Teil (b), so gab z.B. ein Student die Antwort 80 und schrieb, daß „die Anzahl der Würfe sich um 60 erhöht und deshalb auch die Anzahl der Landungen mit der Spitze nach oben um den gleichen Betrag wächst".

Frage B

Eine Reißzwecke wurde 40mal geworfen und landete 28 mal mit der Spitze nach oben.

(a) Welchen Anteil haben die Landungen „mit der Spitze nach oben"?

Wie kommen Sie darauf?

(b) Wie ist Ihre Schätzung für die Anzahl der Würfe mit der Spitze nach oben, wenn die Reißzwecke jetzt 100mal geworfen wird?

Wie kommen Sie darauf?

Abb. 2

Anzahl (in %) der Antworten zu den numerischen Teilen der Frage		
	Brunel	Waikato
(a)		
richtig (7/10)	57 (100)	52 (81)
falsch	0 (0)	8(13)
ich weiß nicht	0 (0)	0 (0)
keine Antwort	0 (0)	4 (6)
(b)		
richtig (70)	41 (72)	28 (44)
falsch	15 (26)	27 (42)
ich weiß nicht	1 (2)	5 (8)
keine Antwort	0 (0)	4 (6)

In einer weiteren Frage ging es um das Produkt der zwei Zahlen, die man bei einem Wurf mit zwei gewöhnlichen Würfeln erhält. Die Frage und die Verteilung der Antworten sind in Abb. 3 enthalten. Viele der falschen Antworten waren auf andere Ursachen zurückzuführen, als die Fehler beim proportionalen Denken. Besonders beunruhigend ist die große Zahl der Studenten, die die Antwort gaben, daß ein gerades und ein ungerades Produkt gleichwahrscheinlich seien und noch bedenklicher erschien uns, daß 14 Studenten aus Brunel und 9 aus Waikato ihre Wahl mit solchen Erklärungen rechtfertigten wie „Es gibt gleich viele gerade und ungerade Zahlen auf einem Würfel".
Nur 22 der 30 Studenten aus Brunel und 5 der 10 aus Waikato, die die richtige Antwort wählten, gaben eine korrekte Begründung dafür an. Nur eine kleine Anzahl bemerkte also, daß es sich um Produkte handelte und etliche betrachteten offensichtlich Summen. Z.B. schrieb ein Student, der die richtige Antwort ankreuzte, „Nur eine gerade und eine ungerade Zahl ergeben eine ungerade Summe".

Frage C

Es wird mit zwei gewöhnlichen Würfeln gewürfelt.

Für das Produkt der beiden Augenzahlen gilt:

	Anzahl (%) der Antworten			
	Brunel		Waikato	
Eine ungerade Zahl ist wahrscheinlicher als eine gerade.	1	(2)	5	(8)
Eine gerade Zahl ist wahrscheinlicher als eine ungerade*.	30	(53)	10	(16)
Es ist genauso wahrscheinlich, daß es eine gerade Zahl ist, wie daß es eine ungerade ist.	23	(40)	41	(64)
Ich weiß es nicht.	1	(2)	0	(0)
keine Antwort	2	(4)	8	(13)
Gesamt	57	(100)	64	(100)

* richtige Antwort

Abb. 3

Produkt ist ein weiterer Fachausdruck, der von vielen Studenten nicht richtig erfaßt wird. Einige scheinen zu glauben, daß damit das Ergebnis einer nicht weiter spezifizierten Operation gemeint ist, häufig wird es als Addition aufgefaßt.
Eine Folgeuntersuchung in Neuseeland (Sharples 1991) zeigte, daß die Verwechslung von Summen und Produkten noch tiefliegender ist als wir anfangs dachten. Wir fragten in einem Mehrfachwahltest ohne Verwendung eines Taschenrechners nach dem Produkt der Zahlen 8, 5, 3, und 2. 26 der insgesamt 104 Studenten gaben die Antwort „18“ und 9 wählten „ich weiß nicht“.

Ausblick

Was als eine Untersuchung zum leichten Umgang der Studenten mit Verhältnissen begann, hat eine Reihe weiterer Barrieren beim Lösen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben aufgedeckt. Einige von ihnen, wie Fehler beim Kürzen und die Verwechslung von Produkten und Summen könnten als mathematische angesehen werden. Andere, insbesondere das Gleichwahrscheinlichkeits-Syndrom, sind Gegenstände, die die Statistiklehrer aufgreifen sollten, um den Studenten Erfahrungen in zahlreichen Situationen mit nicht gleichwahrscheinlichen Ergebnisse zu ermöglichen (vgl. Hawkins et al. 1992).

Um den Studenten zu helfen, ihre Mißverständnisse zu überwinden, ist es nützlich zu wissen, wo diese herrühren. Diesbezüglich fanden wir heraus, daß zusammenhängende Begründungen der Studenten für falsche Antworten (wie etwa „Weil es eine Wahrscheinlichkeit von 50% für beide Lagen gibt“ bei der Frage mit der Reißzwecke, oder „Mögliche Produkte sind 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10, 12“ bei der Frage über die zwei Würfel) sehr aufschlußreich für fehlerhaftes Denken sind. Wir glauben, daß ein Untersuchung dieser Fälle noch informativer wäre, wenn mit einzelnen Studenten während des Lösens der Aufgaben diskutiert und so ihre Denkvorgänge erforscht werden könnten.

Wir haben einige unserer ursprünglichen Fragen an Hand der Ergebnisse der Ausgangsuntersuchung erläutert und versprechen uns von der gegenwärtig laufenden Runde der Untersuchung weitere Informationen über einige der Fehlvorstellungen und Mißverständnisse.

Literatur

HAWKINS, A., JOLLIFFE, F. and GLICKMAN, L. (1992): Teaching Statistical Concepts. Longman

JOLLIFFE, F. and SHARPLES, F. (1991): An investigation of the knowledge of proportion and probability that students bring to university with them. Proc. Third International Conference on Teaching Statistics, **1**, 370 International Statistical Institute

MONKS, A. R. (1985): Equally likely. Teaching Statistics, 7(3), S. 66 - 69

SHARPLES, F. (1991): When is a product not a product? unpublished paper presented at the Mathematics Colloquium Education Day, New Zealand