Stochastik in der Schule Heft 2, 7. Jg. (1987)

DIE BREITE DER BINOMIALVERTEILUNG - EIN ELEMENTARER ZUGANG

von Dr. Michael Mrowka, Frankfurt a. M.

Bekanntlich ist es nicht einfach, die Varianz als geeignetes Streumaß einer Wahrscheinlichkeitsverteilung einzuführen. Erfahrungen, auf die die Schüler zurückgreifen können, fehlen immer. Soll dann noch die Wurzel aus dieser Größe als "richtiger" Zahlenwert der Streuung definiert werden, so ist die Überredungsgabe des Lehrers besonders gefordert.

Ein manchmal begangener Weg der nachträglichen Rechtfertigung des Begriffs besteht darin, daß

- man sich auf die Binomialverteilung spezialisiert,
- deren Varianz Npq berechnet, und
- nach Übergang zur Normalverteilung zeigt, daß $\sigma = \sqrt{Npq}$ gerade der Abstand der Wendepunkte vom Zentrum der Verteilung **ist**.

In Grundkursen kann dieser lange Weg kaum beschritten werden; auch in Leistungskursen stellen die Stirlingsche Formel und ihre Anwendung im vorliegenden Fall noch besondere Hürden dar.

Andererseits ist es für viele Anwendungen wichtig, ein Maß für die Breite der Binomialverteilung zu haben. W. Kroll schlägt dazu eine zeichnerisch-experimentelle Methode vor, bei der die Schüler auch zugleich Erfahrungen mit verschiedenen Binomialverteilungen sammeln können. (2)

Hier soll gezeigt werden, daß für eine rechnerische Herleitung der Formel

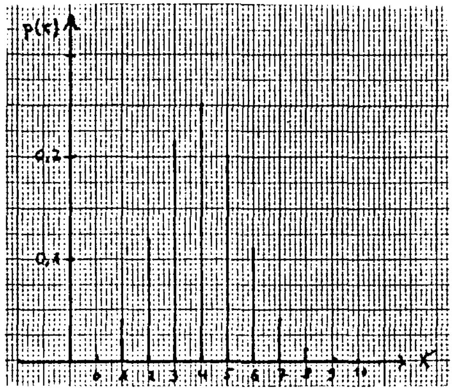
$$\sigma = \sqrt{Npq}$$

nur die Lösung einer quadratischen Gleichung erforderlich ist.

Folgendermaßen kann man vorgehen:

Betrachtet man graphische Darstellungen einiger Binomialverteilungen, so ist intuitiv plausibel, daß der Abstand von der "Mitte" von den "Wendepunkten" ein mögliches Maß der Breite darstellt.

Was eigentlich unter "Wendepunkten" zu verstehen ist, ergibt die Beobachtung der Differenzen benachbarter Funktionswerte. Schreitet man von $x = 0$ aus zu höheren x-Werten fort, so nehmen die Differenzen zunächst zu und von einer gewissen Stelle an wieder ab, bis das Maximum erreicht ist. Entsprechendes ist auf dem absteigenden Ast der Verteilung zu erkennen. Diese gewissen Stellen interessieren uns. (Vom Ansatz her ist dieses Verfahren auf alle diskreten Verteilungen anwendbar. Analog wurde in (1), S. 109, bei der Bestimmung des Wertes größter Wahrscheinlichkeit vorgegangen.)



Für festes N und p wollen wir die Wahrscheinlichkeit für x Erfolge mit p(x) bezeichnen. Die eben betrachteten Differenzen schreiben sich dann als

$$p(x+1) - p(x) \;;$$

über Zunahme oder Abnahme gibt das Vorzeichen von

$$\big(p(x+1) - p(x)\big) - \big(p(x) - p(x-1)\big)$$

Auskunft. (Den in der Differenzenrechnung verwendeten Begriff "zweite Differenz" sollte man hier nur dann explizit einführen, wenn er auch an anderer Stelle im Unterricht fruchtbar gemacht werden kann.)

Die Stellen des Vorzeichenwechsels finden wir nun als Lösungen der Gleichung

$$p(x+1) - 2\,p(x) + p(x-1) = 0 \quad \text{oder}$$

$$\binom{N}{x+1} p^{x+1} q^{N-x-1} - 2\binom{N}{x} p^{x} q^{N-x} + \binom{N}{x-1} p^{x-1} q^{N-x+1} = 0 \,.$$

Auf den ersten Blick mag diese Gleichung unangenehm erscheinen, sie enthält Terme wie p^x und $x!$ in komplizierter Konfiguration; die genaue Analyse zeigt aber: Nach Multiplikation mit

$$(x+1)!\,(N-x+1)!\,/\,N!\;p^{x-1}q^{N-x-1}$$

erhalten wir

$$p^2\cdot(N-x+1)(N-x) - 2pq\cdot(x+1)(N-x+1) + q^2\cdot x(x+1) = 0\,,$$

eine schlichte quadratische Gleichung. Wir sortieren nach Potenzen von x:

$$x^2\cdot(p^2+2pq+q^2) + x\cdot(-2Np-p^2+q^2) + (N^2p^2+Np^2-2Npq-2pq) = 0.$$

Hier bemerke man, daß der Fehler von x^2 gleich 1 ist, und daß

$$-p^2 + q^2 = -p + q;$$

die Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$x^2 + x\cdot(-2Np - p + q) + (N^2p^2 + Np^2 - 2Npq - 2pq) = 0\,.$$

Sie hat die Lösungen

$$x_{1/2} = Np + \frac{p-q}{2} \pm \sqrt{D}\,.$$

Bei der Berechnung der Diskriminante D ist es lehrreich, die einzelnen Potenzen von N im Auge zu behalten; man findet:

$$D = Npq + pq + 1/4\,.$$

Auch wenn die Lösungen $x_{1/2}$ nicht ganzzahlig sind, trennen sie doch für die nur bei ganzen Zahlen definierte Funktion p(x) die Bereiche zunehmender und abnehmender Steigung. Da es für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (z.B. zur empirischen Aufstellung der σ-Regeln) nur auf p(x) für ganzzahliges x ankommt, ist es kein Unglück, wenn wir D durch den einfacheren Ausdruck Npq ersetzen, der in den Anwendungsfällen ohnehin den Hauptanteil ausmacht. Die Lösungen ändern sich dadurch nur wenig. (So gilt z.B. für $p=1/2$ und $Npq > 1$:

$$\sqrt{Npq + 0.5} - \sqrt{Npq} < \sqrt{1.5} - \sqrt{1} \approx 0.225\ .)$$

Eine allgemeinere Abschätzung liefert:

Ist $Npq > 1$, so liegen – mit einem Fehler von weniger als 1/4 – die Wendestellen der Binomialverteilung im Abstand

$$\sigma = \sqrt{Npq}$$

links und rechts vom Zentrum der Verteilung.

Literatur

(1) Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1. Klett-Verlag, 1976

(2) Kroll, W.: Die Streuung der Binomialverteilung. In: mathematik lehren, Heft Nr. 17 (1986), S. 48 - 49