Wahrscheinlichkeitstheoretisches Argumentieren am Beispiel eines Münzwurffeldes

von I.W. Kelly

Stichworte: Unterricht, Wahrscheinlichkeit; Glücksspiel; Wahrscheinlichkeitsgesetze; Stichprobenumfang; Zufallsfolge; Zufallsereignis; Häufung von Ereignissen

In diesem Aufsatz soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe eines 20x20-Feldes Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermitteln kann und wie man den Schülern dabei die Möglichkeit geben kann, typische Fehlschlüsse aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung empirisch zu untersuchen - z.B. den "Trugschluß des Spielers". Darüber hinaus werden einige Vorschläge gemacht, wie man einen Bezug herstellen kann zwischen diesen wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen und Situationen des täglichen Lebens.

Das Feld aus Figur 1 kann auf kariertem Papier erstellt werden. Jeder Schüler bekommt ein solches Stück Papier und beginnt in der oberen linken Ecke, um dann von links nach rechts Zeile für Zeile die Ergebnisse (Wappen oder Zahl) von Münzwürfen zu notieren. Jeder Schüler schafft sich also mit den Ergebnissen seiner Münzwürfe sein eigenes Experimentierfeld. Das vorliegende Feld (Figur 1) ist ein Beispiel.

Es hat sich gezeigt, daß dieses Münzwurfprojekt sehr nützlich ist, nachdem die Schüler mit den Multiplikations- und Additionsregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut gemacht worden sind. Das Feld gibt ihnen die Möglichkeit, das Gelernte empirisch zu testen. Gleichzeitig entwickeln sie ein Verständnis für die Unsicherheit, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Schlüs-

sen innewohnt.

Relative Häufigkeit:

Beim Münzwurf gehen wir üblicherweise von der Wahrscheinlichkeit 0,5 für "Wappen" aus. Gemeint ist damit der Anteil der Wappen an der Gesamtzahl der Würfe. Mit anderen Worten: ungefähr 50 % der Ausgänge werden Wappen und ungefähr 50 % Zahl sein. Die tatsächliche Anzahl der Wappen in einer Serie von Münzwürfen wird mit großer Sicherheit nicht gleich der Anzahl der Zahlen sein.

Schüler müssen den Unterschied zwischen relativer und absoluter Häufigkeit begreifen, um die Ergebnisse langer Versuchsserien zu verstehen. Wenn wir nämlich beim Münzwurf davon sprechen, daß sich Wappen und Zahl hinsichtlich ihrer Häufigkeiten langfristig ausgleichen, so meinen wir einen Ausgleich hinsichtlich des Quotienten.
Die Schüler müssen verstehen, daß sich der Quotient aus Wappen und Gesamtzahl (Zahlen und Gesamtzahl) nicht dadurch nähert, daß die Anzahlen von Wappen und Zahl sich ausgleichen, sondern dadurch, daß jede Folge von Wappen und Zahlen um so weniger ausmacht, je höher die Gesamtzahl der Würfe ist. Das heißt, die Differenz zwischen Wappen und Zahl geht einfach unter in der großen Anzahl von Würfen. Weaver faßt dies sehr schön zusammen:

Es ist ein charakteristisches Merkmal jeder Serie von Wahrscheinlichkeitsversuchen, daß sie sich im Sinne der Quotienten immer besser, im absoluten Sinne aber immer schlechter, immer chaotischer verhält.

Schauen wir uns das 20x20-Feld in Figur 1 ein wenig genauer an. Es kann in vier Viertel aufgeteilt werden.

1	3
3	4

	Teil 1	Teil 1 bis 2	Teil 1 bis 3	ganzes Feld
Wappen (W)	54 (54%)	103 (51,5%)	163 (54,3%)	214 (53,5%)
Zahl (Z)	46 (46%)	97 (48,5%)	137 (45,8%)	186 (46,5%)
Differenz (Anzahl W - Anzahl Z)	8	6	26	28

Im ersten Viertel (siehe Tafel 1) des Feldes (oben links) beträgt die relative Häufigkeit der Wappen 54 %, und es gibt 8 Wappen mehr als Zahlen. Addiert man die Viertel sukzessiv auf, so sieht man, daß sich die relative Häufigkeit der Wappen tatsächlich 50 % nähert, daß aber die absolute Differenz der Anzahlen von Wappen und Zahl nicht vorhersagbar ist.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	W	W	W	Z	W	W	W	Z	W	Z	Z	Z	Z	W	Z	W	W	Z	W	W
2	Z	Z	Z	W	Z	Z	W	W	Z	W	Z	W	Z	Z	W	Z	Z	Z	Z	Z
3	Z	Z	W	Z	W	W	Z	W	Z	Z	W	Z	W	W	W	Z	W	Z	Z	W
4	W	W	W	Z	Z	W	W	Z	W	W	Z	Z	W	W	W	W	W	W	W	W
5	Z	Z	Z	W	Z	W	W	Z	W	Z	Z	Z	W	W	Z	Z	W	W	Z	W
6	Z	W	Z	W	W	W	Z	W	W	W	W	W	Z	Z	Z	Z	W	W	Z	Z
7	W	W	W	W	W	Z	Z	W	W	Z	Z	W	W	W	Z	W	W	Z	W	Z
8	W	W	Z	Z	W	W	Z	W	Z	W	Z	W	Z	W	Z	W	W	Z	Z	Z
9	Z	Z	Z	Z	Z	Z	W	Z	W	Z	Z	Z	W	Z	Z	Z	W	W	W	W
10	Z	W	W	W	Z	Z	Z	W	W	W	W	Z	W	Z	W	Z	Z	W	Z	Z
11	Z	W	Z	W	W	W	Z	W	W	Z	W	W	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z
12	W	W	W	Z	Z	Z	Z	Z	W	W	W	W	Z	Z	W	W	Z	Z	Z	Z
13	W	W	Z	Z	W	W	W	W	W	W	Z	W	W	W	W	Z	Z	Z	W	Z
14	Z	W	W	W	Z	W	W	W	W	W	W	Z	W	W	Z	W	Z	W	Z	W
15	Z	W	Z	W	W	Z	W	W	Z	W	Z	W	Z	Z	Z	Z	Z	W	W	Z
16	W	W	W	W	W	Z	W	W	Z	W	Z	Z	Z	W	Z	W	W	Z	Z	W
17	W	Z	W	Z	W	W	Z	Z	W	Z	W	W	Z	W	W	W	Z	Z	W	Z
18	Z	W	W	W	Z	W	Z	Z	Z	Z	W	Z	W	W	W	W	W	W	Z	W
19	W	Z	W	W	Z	W	Z	Z	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	Z
20	Z	Z	Z	W	W	Z	W	W	Z	Z	Z	Z	Z	W	W	Z	Z	W	W	Z

Figur 1. Ein Münzwurffeld

Stichprobenumfang

Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung können von Schülern zur Entwicklung induktiven Denkens verhelfen, d.h. zu Schlußweisen, bei denen Daten zur Unterstützung von Schlüssen dienen. Eine sehr wichtige Rolle spielt dabei der Stichprobenumfang. Im täglichen Leben werden sehr oft Schlüsse aus zu kleinen Stichproben gezogen. Um deutlich zu machen, wie unzuverlässig kleine Stichproben sind, können die Schüler die Anteile von Wappen und Zahlen in Stichproben verschiedenen Umfangs untersuchen. Die Schüler werden in den verschiedenen Reihen ihrer Felder große Unterschiede bei den relativen Häufigkeiten feststellen. Werden andererseits größere Stichproben untersucht, so werden sich die Prozentzahlen für Wappen und Zahl immer weniger von 50 % und immer weniger voneinander unterscheiden. Es dürfte sinnvoll sein, die Schüler darauf hinzuweisen, daß 400 Würfe im Grunde genommen eine kleine Zahl ist.

Als Folgeübung zu dem obigen Beispiel kann man die Schüler auffordern, darüber nachzudenken, wann sie selbst im täglichen Leben induktiv schließen, und Beispiele für solche Schlüsse zu finden, die auf Stichproben mit unzureichendem Umfang beruhen. Wir bilden uns z.B. oft schon nach einer kurzen Unterhaltung ein Urteil über einen Menschen. Oder wir urteilen über die Qualität der Küche eines Restaurants schon nach ein oder zwei Besuchen.

Zufallsfolgen

Die Schüler können auch andere Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den Ergebnissen in ihrem eigenen Münzwurffeld vergleichen. Sie können z.B. an ihrem eigenen Feld entdecken, daß keines der nachfolgend genannten

Ereignisse signifikant öfter auftritt als die anderen:

a. WWWWW b. ZZZWW c. ZWZWZ

Jedes dieser Ereignisse hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32}$. Wird jede Reihe des Felder in vier Serien mit fünf Würfen aufgeteilt, so erhält jeder Schüler achtzig Stichproben mit je fünf Würfen.

Schüler vermuten meistens, daß (c) wesentlich wahrscheinlicher ist als (a) oder (b). Kahneman und Tversky (1972) erklären diesen Irrtum damit, daß die Schüler "zufällig" interpretieren als "Muster mit häufigem Wechsel". Diese Beobachtung wird darin offensichtlich, daß Leute nicht in der Lage sind, eine Zufallsfolge zu erzeugen. Sie zeigen eine auffallende Tendenz, zu wenige Wiederholungen und zu viele Wechsel in die Folge zu bringen, so wie in (c). (Wagenaar, 1972).

Häufung von Ausgängen

Unter Zufallsbedingungen gesammelte Daten neigen dazu, sich "in Klumpen" zu häufen. Solche Klumpen verleiten oft zu dem Fehlschluß, daß es einen Kausalzusammenhang geben muß. Häufig tritt dieses Phänomen bei medizinischen Untersuchungen auf. In den vergangenen Jahren hat das Center for Disease Control (CDC) in den USA fünf unabhängige Fälle von gehäuft auftretenden Krankheiten untersucht, um umweltbedingte Ursachen für das ungewöhnlich häufige Auftreten seltener Krankheiten und Geburtsfehler zu finden. Dr. Larry Edmunds von der CDC-Abteilung für Geburtsfehler stellt fest: "Wir haben nie eine Ursache für die Häufung gefunden." (Edmunds, 1982).

Natürlich können Häufungen auch kausal begründet sein, und nicht durch Zufall. Manchmal ist dieser Zusammenhang offensichtlich, z.B. bei der Häufung von Sternen in einer Galaxie. In anderen Fällen, etwa bei der Häufung von Leukämie bei Kindern (Heath und Hasterlik, 1962), ist dieser Zusammenhang nicht so deutlich. Die Untersuchung, ob solche Häufungen vom Zufall oder von irgendwelchen Abhängigkeiten herrühren, weil wir nicht wissen, in wieviel vergleichbaren Gruppen die Leukämie keine Tendenz zur Häufung zeigt (Larsen und Marx, 1981, S. 141-143). Häufungen treten auch im Alltag oft auf, z.B. wenn Leute eine Glücks- oder Pechsträhne haben.

Der Hang von Zufallsereignissen zur Häufung wird in dem Gesamtbild des 20x20-Feldes offenbar. Das Muster illustriert den Häufungseffekt mit dramatischer Deutlichkeit. Gardner (1982, S. 114) hat vorgeschlagen, diesen Effekt dadurch deutlich sichtbar zu machen, daß die verschiedenen Ausgänge verschieden gefärbt werden.

Der Trugschluß des Spielers

Es ist eine nützliche Folgeübung, die Schüler mit folgendem Problem zu konfrontieren:

Es werden vier Serien von Ausgängen beim Roulette betrachtet (R = rot und S = schwarz):

1. SSSS_ 2. RRSS_ 3. RRRS_ 4. RSRS_ .

Die Schüler sollen erraten, welche Fortsetzung am wahrscheinlichsten ist - zur Auswahl stehen:

a. S b. R c. R und S sind gleich wahrscheinlich.

Viele Schüler werden auf den Trugschluß des Spielers hereinfallen - die Überzeugung, daß der Ausgang eines Zufallsexperiments von den vorhergehenden Ausgängen abhängt. Diese Schüler werden entweder R oder S als die wahrscheinlichste Fortsetzung vermuten. Die richtige Antwort ist, daß in allen vier Fällen R und S gleich wahrscheinlich sind - falls das Roulette fair ist. Sind Schüler nicht davon zu überzeugen, so können sie ihre Vermutung empirisch überprüfen, indem sie mit Hilfe ihres Münzwurffeldes eine Tabelle erstellen. Die Schüler suchen die folgenden Serien in ihrem Feld und notieren jeweils den nächsten Ausgang.

	Serien	Ausgänge	W	Z
1.	ZZZZ_			
2.	WWZZ_			
3.	WZWZ_			

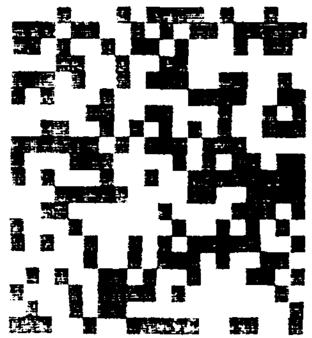
Wenn die Ergebnisse aller Schüler zusammengefaßt werden, sollten die Ergebnisse keine Tendenz erkennen lassen, daß ein Ausgang bevorzugt auftritt, unabhängig von dem Anfang der Serie.

Literatur

Edmunds, L. (1982). Zitiert in: Pacific News Service Release. 18. Jan. USA
Gardner, M. (1982). Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight. San Francisco: W.H. Freeman & Co.
Heath, C.W. & Hasterik, R.T. (1962). Leukemia among children in a suburban community. The American Journal of Medicine. 34, 796-812.
Kahneman, D. &Tversky, A. (1972). Subjective probability: a judgement in representativeness. Cognitive Psychology, 3, 430-454.
Larsen, R. & Marx, M. (1981). An Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Wagenaar, W.A. (1972). Generation of random sequences by human subjects: a critical survey of literature. Psychological Bulletin, 77, 65-72.
Weaver, W. (1963). Lady Luck: The Theory of Probability. Garden City, N.J.: Anchor Books.

Ergänzung des Bearbeiters: Umsetzung des Feldes aus Figur 1 nach der erwähnten Anregung von Gardner:



Übersetzung: Reinhard Oselies, Essen

(Originalartikel 'Probabilistic Reasoning Using a Coin Tossing Array', erschienen in Heft 1/1986 von Teaching Statistics)