ABITURAUFGABEN

GK-Aufgabe von Klaus-M. Becker, 5810 Witten

Eine Urne enthält 100 Kugeln von nicht zu unterscheidender Bauart.

a) Es ist lediglich bekannt, daß jede Kugel entweder schwarz oder weiß ist. Man darf 5 Kugeln mit Zurücklegen ziehen und soll sich entscheiden, ob gleich viele schwarze und weiße Kugeln in der Urne sind oder nicht.

Betrachten Sie die Hypothese H: p=0,5 und die Entscheidungsregel:

Anzahl weiß: 2; 3	H wird angenommen
Anzahl weiß: 0; 1; 4; 5	H wird abgelehnt.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, einen Fehler 1. Art zu begehen.
Verändern Sie die Entscheidungsregel derart, daß ein geringerer Fehler 1. Art entsteht. Geben Sie die günstigere Irrtumswahrscheinlichkeit an.

b) Die Urne enthält
I) 35 weiße und 65 schwarze
II) 25 weiße und 75 schwarze Kugeln.

Verwenden Sie die Hypothese und die aufgeführte Entscheidungsregel aus Teilaufgabe a) und berechnen Sie zu beiden Fällen (I und II) den Fehler 2. Art.

Welche Konsequenz auf den Fehler 2. Art hätte eine Veränderung der Entscheidungsregel gemäß Teil a)?

c) Die Urne enthält 40 weiße und 60 schwarze Kugeln. Es werde 500 mal mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie ein Intervall (μ-k, μ+k) so, daß die Anzahl der weißen Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7 % in dieses Intervall fällt.

Unterrichtsszeit: 55 Stunden

Lehrbuch: 'Einführung in die Beurteilende Statistik',
Schroedel, 1980

GK-Aufgabe von Klaus-M. Becker, 5810 Witten

In aller Welt werden Turnierschachspieler nach Bewertungszahlen in Rangfolgen gebracht: ein Spitzenspieler erhält auf internationaler Ebene eine Elo-Zahl (y), in Deutschland rechnet man nach dem Ingo-System (x). In der nachfolgenden FIDE-Liste vom Januar 1982 erscheinen die 8 weltbesten Schachspieler mit beiden Wertungszahlen:

	Ingo	Elo
Karpow	16	2720
Kasparow	22	2640
Timman	20	2655
Kortschnoi	24	2645
Portisch	24	2630
Spasski	26	2625
Hübner	27	2620
Tal	26	2605
	(x)	(y)

a) Prüfe den stochastischen Zusammenhang (Korrelation). Notiere hierzu alle Zwischengrößen wie $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{s}_x$, ... und kommentiere sie.

b) Zeichne die Werte in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem. (Einheiten: x-Richtung 1 cm, y-Richtung 1 mm). Schränke die Bereiche sinnvoll ein. Berechne die Regressionsgeraden und zeichne sie mit ein.

c) Zur Umrechnung von Ingo (x) nach Elo (y) gilt die offiziell anerkannte Formel

$$y = 2840 - 8\ x.$$

Zeichne sie ebenfalls in das Koordinatensystem ein und nimm Stellung.

Gib auch eine eigene Umrechnungsformel an.

Unterrichtszeit: 58 Stunden

Lehrbuch: 'Mathematik heute, Leistungskurs Stochastik' Schroedel, 1984

GK-Aufgabe von Peter Bohne, 4500 Osnabrück

Bei einem Glücksspiel sei die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich 0,5, bei "Gewinn" wird der doppelte Einsatz ausgezahlt. Ein Spieler geht nach folgendem System vor: er beginnt mit dem Einsatz a und hört nach dem ersten Einzelspiel auf, wenn er gewonnen hat; hat er verloren, so verdoppelt er den Einsatz und spielt ein zweites Mal. Bei Gewinn hört er jetzt auf, bei Verlust verdoppelt er den Einsatz erneut und spielt weiter ... usw.

a) Geben Sie alle möglichen (Gesamt-) Ergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten an, wenn der Spieler spätestens nach sechs Einzelspielen abbricht, auch wenn er bis dahin nicht gewonnen hat. Berechnen Sie den Erwartungswert des Reingewinns (Auszahlung minus Gesamteinsatz) in diesem Fall.

b) Das Spiel werde ohne Begrenzung der Einzelspielzahl so lange fortgesetzt, bis zum ersten Mal ein Gewinn auftritt. Y gebe die Anzahl der vorangegangenen Verlustspiele an. Hat Axiom (2) der Wahrscheinlichkeitstheorie

$$\sum_{y \in W_Y} f(y) = 1$$

für diese Zufallsgröße Y noch Gültigkeit?

Unterrichtszeit: 45 Stunden

GK-Aufgabe von Manfred Forte, 5000 Köln 91

Bei einem Monopoly-ähnlichen Spiel wird ein mutmaßlich idealer Würfel für Spielgeldzahlungen benutzt, der auf seinen sechs Flächen die Zahlen 2000, 2000, 2000, 2000, 5000, 5000 trägt.

a) X_1 bezeichne die beim einmaligen Werfen dieses Würfels angezeigte Augenzahl:
   Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße X_1.

b) Der Würfel wird nun achtmal geworfen.

   Y bezeichne das Ergebnis der Würfe in der Reihenfolge der Ausführung.

   Z sei die Augensumme aller acht Würfe.

   Beschreiben Sie in geeigneter Form die zugehörigen Ergebnismengen. Wieviele Elemente enthält die Ergebnismenge zu Y?
   Zählen Sie auf, welche Werte Z annehmen kann.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Augensumme den Wert 25.000 annimmt?

c) Berechnen Sie möglichst einfach den Erwartungswert der Zufallsgröße Z.

d) Um zu prüfen, ob der verwendete Würfel tatsächlich ideal ist, sollen 1800 Würfe durchgeführt werden. Dabei werde die Anzahl k derjenigen Würfe gezählt, die '5000' anzeigen. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k_o mit der Eigenschaft, daß mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl k im Intervall $[600-k_o\ ;\ 600+k_o]$ liegt.

GK-Aufgabe von Joerg Fricke, 5760 Arnsberg 1

Laut Herstellerangaben befinden sich in der Produktion elektrischer Widerstände 5 % Ausschußware.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Kauf von 100 Widerständen dieser Produktion weniger als 5 defekt sind?

b) Ein Elektriker benötigt 500 Widerstände. Wieviele dieser elektrischen Bauteile aus der obigen Produktion sollte er kaufen, damit er mit ca. 97,75 %iger Wahrscheinlichkeit genügend brauchbare besitzt?

c) Die Wartungsfirma teilt dem Hersteller der Widerstände mit, daß eine häufigere Inspektion der Maschinen den Ausschußanteil von 5 % auf 3 % senken würde. Der Hersteller möchte sich durch einen Test von der Glaubwürdigkeit der Wartungsfirma überzeugen, da der neue Service zusätzliche Kosten verursacht. Deshalb wird zunächst ein einmonatiger Vorvertrag abgeschlossen. Während dieser Zeit sollen 1000 Widerstände einer Qualitätskontrolle unterzogen werden.

   c_1) Begründen Sie, warum man in diesem Fall einseitig testen sollte!

   c_2) Formulieren Sie eine Entscheidungsregel für den Hersteller bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 0,15 %!

   c_3) Erläutern Sie anhand dieser Aufgabe was man unter dem Fehler

1. Art und was man unter dem Fehler
2. Art beim Hypothesentest versteht!

Unterrichtszeit: 3 Wochenstunden über 2 Halbjahre

Lehrbuch: 'Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik'
Klett, und
'Einführung in die Beurteilende Statistik'
Schroedel

GK-Aufgabe von Bernhard Herrich, 4986 Rödinghausen 1

Eine Tageszeitung führt eine Meinungsumfrage zu einer geplanten Aktion des Stadtrates durch. Die 500 befragten Bürger sind der Zeitung namentlich bekannt, sie sind zufällig ausgewählt, die Umfrage wird unter ihnen anonym durchgeführt.
Ergebnis der Umfrage:
37 % der Befragten stimmten der Aktion voll zu, 33 % hielten die Aktion prinzipiell für richtig, ihnen mißfielen jedoch ein paar Einzelheiten. Alle anderen Befragten waren gegen die Aktion.

a) Kann man mit 95,5 %iger Sicherheit aufgrund dieser Umfrage sagen, daß mehr als $\frac{2}{3}$ der Bevölkerung der geplanten Aktion zumindest prinzipiell zustimmen würden?

b) Aus den 500 Befragten werden die 40 Personen eines bestimmten Bezirks ausgewählt. Es zeigte sich, daß davon 14 voll für die Aktion, und 10 nur prinzipiell dafür waren. Weichen diese Werte vom Umfrageergebnis der 500 Befragten signifikant ab? (Konfidenzbereich: 95,5 %)

c) Aus der Menge der 500 Personen werden 20 Personen zufällig ausgewählt. X sei die Zufallsgröße, welche angibt, wieviele dieser 20 Personen die Aktion ganz ablehnen. Begründen Sie, daß eine zufällig aus den 500 Befragten ausgewählte Person die Aktion mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ ablehnt!

   Bestimmen Sie nun $\mu(X)$ und $P(X<\mu)$!

d) Zwei Wochen nach der 1. Umfrage werden die 500 Personen ein 2. Mal befragt. Sie mußten angeben, wie sie beim 1. Mal gestimmt hatten, und wie nun ihre derzeitige Meinung sei. Die Zeitung veröffentlichte daraufhin:

   "Bei der 1. Umfrage gab es drei Gruppen:
   A) volle Zustimmung - 37 % -,
   B) nur prinzipielle Zustimmung - 33 % -,
   C) Ablehnung - 30 % -.
   Bei der 2. Umfrage stellte sich heraus, wie groß der Anteil der 'Meinungstreuen' war, die bei ihrer Meinung geblieben sind. 80 % aller Befragten waren meinungstreu. 30 % aus der Gruppe C) waren nicht meinungstreu. In den Gruppen A) und B) war der prozentuale Anteil der Meinungstreuen größer als in der Gruppe C) aber untereinander gleich."

Errechnen Sie aus diesen Angaben, wie groß der prozentuale Anteil der Meinungstreuen in den Gruppen A) und B) war.

GK-Aufgabe von Rita Manß, 4352 Herten

Beeinflußt die Verpackung den Verkaufserfolg?

Zur Klärung dieser Frage wurde ein Produkt in 5 verschiedenen Verpackungen in je einem Automaten (mit Sichtfenster) angeboten. A behauptet, die Auswahl des Automaten sei rein zufällig, also die Verpackung sei nicht ausschlaggebend. B ist anderer Meinung.

a) Nehmen wir an, A habe recht.

a_1) Wir betrachten 10 Personen, die das Produkt ziehen. Inwiefern kann man, wenn man nur den i-ten Automaten (i = 1, ...,5) betrachtet, die Entscheidungen der 10 Personen als Bernoulli-Kette ansehen?

a_2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Packung aus dem i-ten Automaten

(1) von den 10 Personen überhaupt nicht gezogen wird

(2) von höchstens 2 Personen gezogen wird

(3) von mehr als 3 Personen gezogen wird.

a_3) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Personen unter den 10 betrachteten, welche die Verpackung aus dem i-ten Automaten wählen.

a_4) Mit wievielen Personen, die die Packung aus dem 3. Automaten ziehen, kann man bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5 % rechnen, wenn man insgesamt 1000 Personen, die eine Packung ziehen, beobachtet?

a_5) Bei einer Beobachtung von 1000 Personen ziehen 217 Personen die Packung aus dem 3. Automaten. A behauptet, daß hierdurch seine Vermutung, die Auswahl des Automaten sei rein zufällig, statistisch gesichert wird. Nehmen Sie hierzu Stellung.

b) B, der nicht an die rein zufällige Auswahl glaubt, läßt eine Versuchsreihe mit 750 repräsentativ ausgewählten Versuchspersonen durchführen. 110 ziehen die Packung aus dem 1. Automaten. Bestimmen Sie alle Erfolgswahrscheinlichkeiten p, die mit diesem Versuchsreihenergebnis bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,7 % behaupten, daß die Verpackung beim Automaten 1 den Verkaufserfolg beeinflußt? (mit Begründung!)

Unterrichtszeit: 3 Wochenstunden in einem Schulhalbjahr

Lehrbuch: 'Einführung in die Beurteilende Statistik', Schroedel-Verlag

GK-Aufgabe von Manfred Neitzel, 4040 Neuss 1

Alfred und Bruno verpacken in einer Schokoladenfabrik Schokoladen-Osterhasen in Geschenkkartons. Eines Tages erlauben sie sich einen Scherz: Alfred packt in jeden fünfzigsten Karton Schokoladen-Weihnachtsmänner statt -Osterhasen, und Bruno füllt jeden vierzigsten Karton mit Marzipan-Kartoffeln.

Am Ende des Tagen liegen alle Kartons (unsortiert) in einer Ecke; drei Fünftel von ihnen hat Alfred gepackt, den Rest Bruno. - Ehe beide nach Hause gehen können, greift ein Vorarbeiter zur Kontrolle zufällig einen der Kartons heraus. Betrachten Sie nun folgende Ereignisse:

A: "Dieser Karton wurde von Alfred gepackt",
H: "Dieser Karton enthält Osterhasen", sowie A und H.

a) Berechnen Sie anhand eines vollständigen Baumdiagramms P(H). (Obige Bezeichnungen benutzen!)

b) Drücken Sie die Ereignisse M: "Dieser Karton enthält Marzipan-Kartoffeln" und W: "Dieser Karton enthält Schokoladen-Weihnachtsmänner" durch A (bzw. A) und H (bzw. H) aus, und berechnen Sie anhand des Baumdiagramms zu a) die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse.

b) Alfred und Bruno hatten Pech: ihr Streich ist entdeckt worden, und sie mußten alle falsch gefüllten Kartons aussortieren. - Diese aussortierten Kartons liegen nun (durcheinander) in einer anderen Ecke. Alfred hat Hunger auf Marzipan und greift zufällig einen von diesen Kartons heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieser "Scherzkarton" Marzipan-Kartoffeln enthalten?

(Tip: Wer müßte ihn dann gepackt haben?)

Warum ist diese Wahrscheinlichkeit nicht gleich dem in b) berechneten P(M)?

Unterrichtszeit: 37 Schulstunden

Lehrbuch: Althoff/Koßwig ' Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundkurs', Metzler-Verlag

GK-Aufgabe von T. Röthig, 5030 Hürth

In einer Voruntersuchung vom Umfang 500 erhält eine Partei A 62,3 % der Stimmen.

a) Testen Sie die Hypothese H_o: "Die Partei A erhält die $\frac{2}{3}$ -Mehrheit." (Sicherheitsniveau 99,85 %)

b) Bestimmen Sie mit der Näherungsmethode ein Konfidenzintervall für p, und schätzen Sie damit den notwendigen Stichprobenumfang in der Hauptuntersuchung. (Genauigkeit 2 %, Sicherheitswahrscheinlichkeit 99,7 %)

c) Wie viele Personen hätten mindestens befragt werden müssen, damit bei einem prozentualen Ausgang von 53,7 % bei einer Untersuchung die Partei A mit der absoluten Mehrheit hätte rechnen können? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 99,7 %)

Lehrbuch: 'Einführung in die Beurteilende Statistik', Schroedel-Verlag

GK-Aufgabe von Manfred Stertenbrink, 4040 Neuss 1

a) In einer Urne befinden sich 7 Kugeln mit den Ziffern 1 bis 7. Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

i) drei ungerade Zahlen?
ii) dreimal die gleiche Zahl?
iii) genau zweimal eine ungerade Zahl?

b) In einer großen Urne befinden sich 7000 Kugeln, jeweils 1000 mit den Ziffern 1 bis 7. Es werden 350 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

i) genau 200 mal eine ungerade Zahl?
ii) zwischen 42 und 53 (je einschließlich) mal die 1?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die in Aufgabe a) und b) aufgestellten Ereignisse, wenn ohne Zurücklegen gezogen wird.

d) Auf dem Jahrmarkt wird mit der in Aufgabe a) angegebenen Urne ein Glücksspiel durchgeführt. Ein Spieler zieht zweimal mit Zurücklegen und erhält folgende Gewinne:

5,-- DM, falls er zweimal die 1 zieht,
3,-- DM, falls er zwei gleiche Zahlen (außer 1) zieht,
2,-- DM, falls er genau einmal die 1 zieht.

Die Zufallsvariable X gebe den Gewinn bei einem

Spiel in DM an.

i) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
ii) Zeichnen Sie das zugeöhrige Stabdiagramm.
iii) Wie groß ist die Gewinnerwartung des Veranstalters pro Spiel, wenn der Einsatz 1 DM beträgt?
iv) Der Gewinn für "Genau einmal die 1" soll so abgeändert werden, daß das Spiel fair wird. Wie muß dieser Gewinn dann festgesetzt werden?

Unterrichtszeit: 3 Wochenstunden über 2 Halbjahre

Lehrbuch: Hahn, Dzewas
Grundkurs Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Westermann

GK-Aufgabe von Manfred Stertenbrink, 4040 Neuss 1

Die drei Parteien A, B und C erhielten bei einer Wahl 5/12, 1/3 bzw. 1/4 der Sitze des neuen Parlaments.

a) 9/10 der Abgeordneten der Partei A und 15/16 der Abgeordneten der Partei B sind Männer, während die Partei C genau doppelt so viele Männer wie Frauen stellt. Durch Losentscheid wird ein Abgeordneter (eine Abgeordnete) bestimmt, der (die) die erste Sitzung des Parlaments leiten soll.

   1. Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar.
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leitet eine Frau diese erste Sitzung?
   3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt diese Frau (2.) von der Partei C?

b) Zwischen den Parteien herrscht ein großer Streit um den ersten Sitzungstermin. Zur Lösung dieses Problems wird ein paritätisch (entsprechend der Sitzverteilung) besetzter Ausschuß aus 12 Personen gebildet.

   1. Dieser Ausschuß tagt an einem runden Tisch mit 12 Stühlen. Die Sitzplätze werden zufällig ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen die Abgeordneten der Partei C nebeneinander?
   2. Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn d die 12 Ausschußmitglieder nebeneinander in einer Reihe sitzen?

c) Bei einer Abstimmung wollen die Abgeordneten der Partei C unbedingt einen Vorschlag durchbringen, während die Abgeordneten von A und B zufällig (durch Werfen einer L-Münze) abstimmen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt dieser Vorschlag durch

   1. in dem Ausschuß mit 12 Mitgliedern?
   2. im Parlament mit 240 Mitgliedern?

d) Nach der Hälfte der Legislaturperiode möchte die Partei C den prozentualen Anteil ihrer potentiellen Wähler feststellen. Dazu führt sie eine Befragung von zufällig ausgewählten (wahlberechtigten) Bürgern durch.

   1. Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit die Standardabweichung der Zufallsvariablen $R_n(C)$ (relative Häufigkeit von Stimmen für C) kleiner gleich 0,01 ist, wenn (α) man weiß, daß $p \leq 0,3$ ist?
   (β) über p nichts weiß?

   2. Es werden 2500 Personen befragt, um die Nullhypothese "Der Anteil beträgt 25 %" gegen die Alternativhypothese "Der Anteil beträgt weniger als 25 %" zu testen. Wie ist der Ablehnungsbereich zu wählen, damit das Risiko 1. Art maximal 5 % beträgt?

Unterrichtszeit: 3 Unterrichtsstunden in 2 Halbjahren

GK-Aufgabe von Matthias Wieczorek, 4600 Dortmund-Wickede

Jeden Mittwochabend treffen sich die 100 Mitglieder des Vereins "Freunde des Rösselsprungs e.V." in ihrem Clubheim, um Spiele zu spielen, die ihren Ursprung im Rösselsprung des Schachspiels haben. Bei einem Spiel ist die Figur von ihrem Standplatz A zur gegenüberliegenden Seite zu bringen (siehe Zeichnung). Sie darf sich nur im Rösselsprung und nie rückwärts bewegen. Auf dem Spielplan sind die Endpunkte aller möglichen Züge markiert. Alle Einzelzüge, die von einem Feld aus möglich sind, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für die möglichen Züge von A zur gegenüberliegenden Brettseite und schreiben Sie an jeden Ast die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Figur auf das Feld G, H, I, K oder L gezogen wird?

c) Zufallsgröße X: Anzahl der Züge, bis die andere Brettseite erreicht ist. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße an.
(Geben Sie die Züge so an, daß Sie die Endpunkte jedes Einzelzugs aufführen; Beispiel: AFK)

Im Durchschnitt spielen 40 % der Mitglieder abends dieses Spiel. Ein einmal gewähltes Spiel wird den ganzen Abend beibehalten.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß am Abend mindestens 34 und höchstens 39 Mitglieder dieses Spiel spielen?

e) Bestimmen Sie die Anzahl der Plätze, die für dieses Spiel bereitgehalten werden müssen, damit nur für ca. 2,25 % der Mitglieder alle Spielplätze besetzt sind. Erläutern Sie kurz den Ansatz Ihrer rechnerischen Lösung.

G			H	I	K		L
		C			D	E	F
				B			
						A	

Unterrichtszeit: 52 Schulstunden

Lehrbuch: 'Einführung in die Beurteilende Statistik', Schroedel-Verlag

LK-Aufgabe von Bernhard Herrich, 4986 Rödinghausen 1

Zu einer Testfrage sind 5 verschiedene Antworten gegeben. Genau eine Antwort ist richtig. Die befragten Schüler müssen sich für eine Antwort entscheiden. Hat ein Schüler seine Hausaufgaben ordentlich getan, wird er die Frage mit 100 %iger Sicherheit genau richtig beantworten. Anderenfalls wählt er willkürlich eine Antwort aus. Es sei q die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, daß der Schüler seine Hausarbeit getan hat, und es sei F das Ereignis, daß ein befragter Schüler die Frage richtig beantwortet.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm und beschriften Sie die Äste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten!

b) Drücken Sie $P(E/F)$ durch q aus und zeigen Sie, daß $P(E/F) \geq P(E)$ ist!

c) Berechnen Sie P(F) und bestimmen Sie q so, daß E und F voneinander unabhängige Ereignisse sind!

d) Zur Bestimmung der Zahl q wählt man eine Stichprobe von 20 Schülern einer Schule und befragt sie, ob sie ihre Hausaufgaben gemacht haben. Die Stichprobe liefert das Ergebnis:

   1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1

   (1 = Hausaufgaben gemacht
   0 = Hausaufgaben nicht gemacht.)

   Stellen Sie fest, ob sich die Hypothese, mehr als die Hälfte der Schüler sind fleißig, bei dieser Stichprobe auf dem 5 % Signifikanzniveau halten läßt!

e) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schüler fleißig ist, sei 0,8. Unter den Schülern einer Schule soll nun eine Stichprobe von n Schülern gebildet werden, von der dann später jeder die Testfrage vorgelegt bekommt. Wieviel Schüler müssen mindestens für die Stichprobe ausgewählt werden, damit die Mehrheit der ausgewählten Schüler mit 90 %iger Sicherheit zu den fleißigen gehört?

   Überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie die Bildung der Stichprobe mit Hilfe der Tabelle der Zufallsziffern 50 mal nachspielen und den Prozentsatz der dabei entstehenden "günstigen" Stichproben ermitteln! ("günstig" heißt: die Mehrheit der Schüler einer Stichprobe ist fleißig.)

LK-Aufgabe von B. Lewald, 2000 Hamburg 65

Im "Ammersbeker Anzeiger" arbeiten 10 Männer und 5 Frauen als Journalisten.

1. Aus den 15 Journalisten wird eine Gruppe von 6 Personen zufällig ausgelost, um eine Reportage zu machen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß
   a) alle fünf Frauen
   b) genau vier Männer
   c) Herr Meyer und Herr Schmidt

   in der ausgelosten Gruppe sind.

2. Im Büro sind z Schreibmaschinen vorhanden. Es sei
   - p die Wahrscheinlichkeit, daß ein Journalist zu einem beliebigen Zeitpunkt im Büro ist und eine Schreibmaschine benutzen will;
   - r die Wahrscheinlichkeit, daß zu einem beliebigen Zeitpunkt mehr Schreibmaschinen gebracht werden als vorhanden sind.

   a) Berechnen Sie r für z=10 und p = 0,4.
   b) Es sei z = 14 für r $\geq$ 0,03. Geben Sie eine begründete Abschätzung für p an.

3. X sei die Anzahl der Journalisten, die an einem beliebigen Tag erkrankt sind.

   3.1. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Journalist an einem beliebigen Tag erkrankt ist, sei zunächst 20 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß

3.1.1 kein
3.1.2 genau zwei
3.1.3 mehr als drei

Journalisten erkrankt sind.

3.1.4 Berechnen Sie E(X).

3.2 Die Krankheitswahrscheinlichkeit sei jetzt für Herrn Schmidt 30 %, für Herrn Meyer 10 %, für alle anderen 20 %. Y sei die Zahl der erkrankten Journalisten des Paares Schmidt/Meyer. Berechnen Sie

3.2.1 die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y
3.2.2 E(Y)
3.2.3 Var(Y)
3.2.4 E(X)

Anleitung zu 3.2.1 Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm.

Unterrichtszeit: 42 Stunden

Lehrbuch: Heigl-Feuerpfeil, LK Stochastik, bsv

LK-Aufgabe von Hans-Dieter Riechmann, 4955 Hille 1

Zur Verteilung von 864 Kugeln auf 6 Speicher stehen 2 verschiedene Zufallsgeräte zur Verfügung (s.u.).

Die Kugeln werden bei E eingelassen und bewegen sich stets so, daß ihr Abstand von E nicht kleiner wird.

1. Wie verteilen sich die Kugeln voraussichtlich auf die Speicher, wenn an jeder "Verzweigung" jeder weiterführende Weg mit gleicher Wahrscheinlichkeit benutzt wird?
2. Mit jedem der Zufallsgeräte wird um Geld gespielt. Der Einsatz je Kugel, die bei E eingelassen wird, beträgt 10 Pfg. Das Eintreffen der Kugel im Speicher S_i ($i = 1,2,3,4,5,6$) ist mit folgender Auszahlung verbunden:

S_i	1	2	3	4	5	6	
x_i	30	20	0	0	20	30	Auszahlung in Pfg.

a) Spielen die Geräte fair?

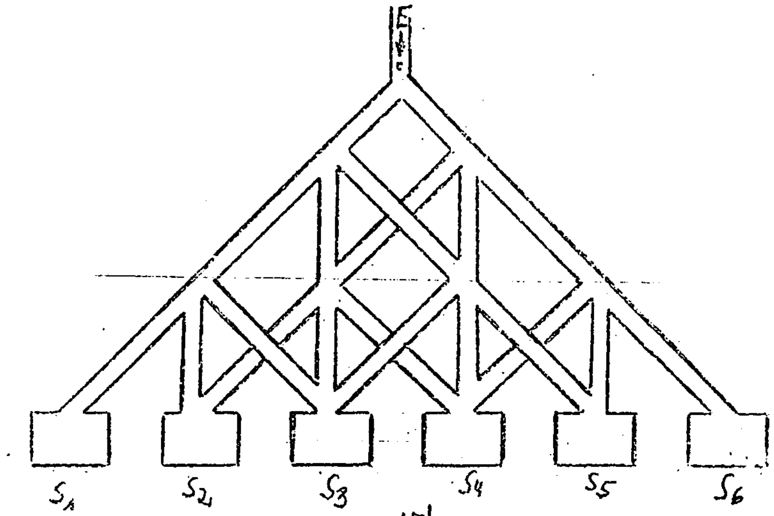
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man in 3 Spielen bei Gerät II

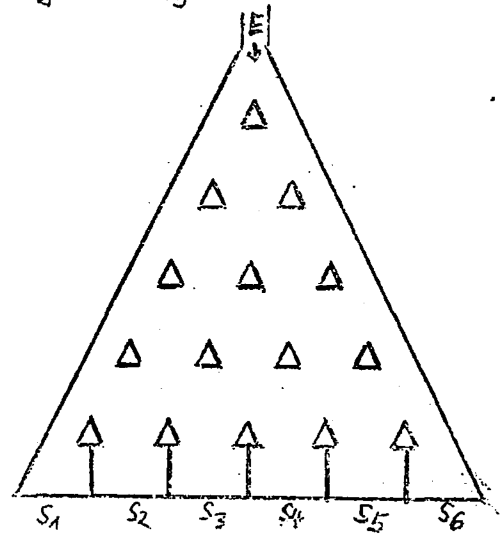
b) 30 Pfg. verlieren,
c) mindestens 20 Pfg. gewinnen?

3. Der Lauf der Kugeln durch Gerät I wird geändert: An jeder Verzweigung wird bei zwei weiterführenden Wegen jeder mit gleicher Wahrscheinlichkeit benutzt, bei drei weiterführenden Wegen jedoch der mittlere

mit doppelt so hoher Wahrscheinlichkeit wie die beiden anderen.

Vergleichen Sie die nun entstehende Verteilung auf die Speicher mit der Verteilung bei Gerät II. Läßt sich das Ergebnis aus dem Aufbau der beiden Geräte oder auf andere Weise begründen?





LK-Aufgabe von Manfred Stertenbrink, 4040 Neuss 1

6,5 % der weiblichen und 8 % der männlichen Schüler an Gymnasien des Landes Nordrhein-Westfalen sind Linkshänder.

a) An einem Gymnasium sind 5/13 der Schüler Jungen. Es wird zufällig ein Schüler ausgewählt.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Linkshänder?

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieser Linkshänder ein Mädchen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter

i) 380 zufällig ausgewählten Jungen eines Gymnasiums genau 30 Linkshänder?

ii) 570 zufällig ausgewählten Mädchen eines Gymnasiums zwischen 32 und 40 (je einschließlich) Linkshänder?

c) In einer Klasse sitzen 3 Links- und 29 Rechtshänder. Die Sitzordnung der Schüler sei zufällig.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen im Klassenraum (32 Plätze, davon 4 Fensterplätze) alle Linkshänder am Fenster?

ii) Im Musikraum sitzen alle 32 Schüler in einem großen Kreis um das Klavier. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen hier die drei Linkshänder nebeneinander?

d) Die Angabe 6,5 % (für weibliche Linkshänder) ist aus einer Stichprobe vom Umfang 1400 gewonnen. Bestimmen Sie zur statistischen Sicherheit 0,95 ein Vertrauens-

intervall und äußern Sie sich zur Genauigkeit dieser Angabe.

e) Der bayerische Kultusminister behauptet, daß an den Gymnasien seines Landes nur 6 % linkshändige Jungen sind. Diese Hypothese (H_0) soll angenommen werden, wenn in einer Stichprobe vom Umfang 800 weniger als 55 Linkshänder sind.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Hypothese zu Unrecht abgelehnt?

ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird diese Hypothese angenommen, obwohl in Wirklichkeit 8 % der Jungen Linkshänder sind?

iii) Wie ist die Entscheidungsregel zu formulieren, wenn das Risiko 1. Art maximal 5 % betragen soll?

Unterrichtszeit: 5 Wochenstunden über 2 Halbjahre

Lehrbuch: Lambacher-Schweizer
Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Klett

LK-Aufgabe von H.K. Strick, 5090 Leverkusen 3

Mathematiklehrer S. behauptet, daß nach seiner Methode die Schüler besser Stochastik lernen können als nach herkömmlichen Methoden. Er will seine 45 Schüler einer Prüfung unterziehen. Die Prüfung setzt sich aus einer Reihe von Fragen zusammen. Abschließend wird eine Prüfung als "bestanden" oder "nicht bestanden" bezeichnet.

a) 60 % der Schüler, die nach herkömmlichen Methoden unterrichtet werden, würden die Prüfung bestehen.

   Formuliere zu der Behauptung des Mathematiklehrers S. für verschiedene Standpunkte geeignete Hypothesen. Gib die zugehörigen Entscheidungsregeln an (90 %-Niveau).

   Beschreibe Fehler 1. und 2. Art zu diesen Hypothesen.

b) Mathematiklehrer S. ist sogar der Überzeugung, daß 70 % seiner Schüler die Prüfung bestehen.

   Gib auch zu dieser Hypothese eine Entscheidungsregel auf dem 90 %-Niveau an.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in der genannten Stichprobe vom Umfang 45 ein Fehler 2. Art auf? Zeichne die Operationscharakteristik.

c) Angenommen, die Erfolgsquote beträgt in Wirklichkeit 65 %. Wie viele Schüler müßte man bzgl. der Hypothese in b) testen, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art höchstens 20 % beträgt?

LK-Aufgabe von H.K. Strick, 5090 Leverkusen

In Rundfunkzeitschriften konnte man im Dezember 1984 lesen, daß eine bestimmte Familienserie von 19,01 Millionen der insgesamt 46,03 Millionen Fernsehzuschauer (über 14 Jahren) gesehen wurde. Die Daten wurden auf einer Erhebung unter 4000 Personen gewonnen.

a) Wie viele Personen in der Stichprobe haben wohl die Familienserie gesehen?

   Welche Sehbeteiligungen sind mit diesem Stichprobenergebnis verträglich? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %)
   Ist es möglich, daß die Sehbeteiligung bei dieser Sendung 43 % betrug?

b) Wie viele Zusachauer hätte man befragen müssen, wenn man die Anzahl der Zuschauer auf 100.000 genau schätzen wollte? (Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 %)

c) Angenommen, die Sehbeteiligung einer Sendung beträgt 37 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann in der Fernsehzeitschrift eine Sehbeteiligung von mindestens 17,86 Millionen Zuschauern angegeben werden?

d) Die Sehbeteiligung wird mit Hilfe von Automaten festgestellt. Würde man die 4000 ausgesuchten Personen interviewen wollen, müßte man damit rechnen, einzelne Personen nicht anzutreffen. Erfahrungsgemäß trifft man nur 70 % der Personen an, die man für eine Befragung ausgesucht hat.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man nach dreimaligem zufällig angesetzten Hausbesuch eine bestimmte Person nicht angetroffen haben? (Welche zusätzliche Annahme muß man machen, um diese Wahrscheinlichkeit auszurechnen?)

Bei wie vielen von den 4000 Personen ist damit zu rechnen, daß dies der Fall sein wird?

Man bestimme einen Bereich, in dem mit 90 % Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Personen liegt, die dreimal nicht angetroffen werden.

HINWEIS: Zur Aufgabenlösung gehört ein ausführlicher Kommentar, insbesondere über die getroffene Wahl des stochastischen Modells.

Unterrichtszeit: ca. 90 Stunden

Lehrbuch: 'Mathematik heute, LK Stochastik',
Schroedel-Schöningh

LK -Aufgabe von Peter Wendt,2200 Kölln-Reisiek

Aufgrund zuverlässiger Meinungsumfragen geht die Partei UVW davon aus, 40 % der Stimmen bei der nächsten Wahl zu erhalten.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Partei von 10^6 Wählern mindestens 399500 jedoch höchstens 401000 Stimmen bekommt?

2. Eine Umfrage bei 10000 Wahlberechtigten ergab 4098 Entscheidungen zugunsten der Partei UVW.

   Gib ein 95 %-Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p an, mit der diese Partei von einem zufällig ermittelten Wahlberechtigten gewählt wird.

   Welche Interpretationen läßt ein solches Konfidenzintervall zu?

3. Wie viele Wahlberechtigte muß man mindestens befragen, damit das "wahre" Wahlergebnis der Partei mit der Mindestwahrscheinlichkeit von 90 % höchstens um 0,005 vom Umfrageergebnis abweicht.

   a) Lösung mit Hilfe der Normalverteilung,
   b) Lösung mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung.

   Worin liegen die unterschiedlichen Ergebnisse begründet?

4. Ein Meinungsforschungsinstitut will eine Umfrage durchführen. Erfahrungsgemäß werden jedoch nur 82 % der "zufällig ausgewählten" Personen angetroffen.

Wie viele Personen muß man mindestens auswählen, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 90 % mindestens 1000 von ihnen anzutreffen?

Unterrichtszeit: 75 Stunden

Lehrbuch: Heigl-Feuerpfeil: Stochastik-Leistungskurs,
BSV 1975
Bosch-Wolff: Leistungskurs Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Westermann, Braunschweig 1980