FAMILIEN, KINDER UND WAHRSCHEINLICHKEITEN

von L.V. GLICKMAN
übersetzt von Reinhard Oselies

Die Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt in der Schule häufig durch Untersuchung von Münzwurf und / oder Würfelversuch. Die Mengen möglicher Ausgänge sind für solche Experimente leicht zu beschreiben. Darüber hinaus kann man mit ihrer Hilfe einige wahrscheinlichkeitstheoretische Phänomene der "realen Welt" im Klassenraum zu simulieren. So kann zum Beispiel der Münzwurf als Modell dienen, wenn es um die Beobachtung des Geschlechts der Kinder in der Familie geht: z.B. könnte "Zahl" für einen Jungen, "Wappen" für ein Mädchen stehen. Sind diese einfachen Experimente der Wahrscheinlichkeitstheorie abgehandelt, so wird der Lehrer meistens zu den "Leckerbissen" der Unterrichtsreihe übergehen: bedingte Wahrscheinlichkeit, Satz von Bayes, Zufallsvariablen usw.

Es wäre allerdings wünschenswert, wenn ein wenig Zeit auf die folgenden wichtigen Punkte verwandt würde:

(i) die Beschreibung von Zufallsexperimenten verlangt große Sorgfalt, und

(ii) die zugehörigen Stichprobenräume sollten explizit und sorgfältig aufgeschrieben werden.

Drei verwandte Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Betrachten wir folgende Problemstellungen:

a) Aus den Familien mit zwei Kindern wird zufällig eine ausgewählt, bei der eines der Kinder ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Kind ebenfalls ein Junge?

b) Aus den Familien mit zwei Kindern wird zufällig eine ausgewählt, und dann wird zufällig eines der Kinder dieser Familie ausgewählt. Wenn dieses Kind

ein Junge ist, so ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, daß das andere Kind ebenfalls ein Junge ist.

c) Aus allen Kindern solcher Familien (d.h. Familien m mit zwei Kindern) wird zufällig eines ausgewählt, und es ist ein Junge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Kind in seiner Familie ein Junge.

Wir gehen davon aus, daß Jungen und Mädchen gleich wahrscheinlich sind.

Spontan mag ein Schüler zu dem Schluß gelangen, daß a) bis c) letztendlich gleichwertige Probleme sind und daß die Antwort jedesmal 1/2 ist.

Dies ist aber nicht so! a) wird im Unterricht über Wahrscheinlichkeitsrechnung oft als warnendes Beispiel für voreilige Schlüsse benutzt - die Antwort ist 1/3, nicht 1/2. Eine genauere Diskussion von paradoxen Problemen dieser Art findet der Leser in dem u.a. Artikel.

Beschreibung der drei Zufallsversuche

Bei Versuchen wie a), wo zufällig eine Familie ausgewählt wird, beschreibt man üblicherweise den Stichprobenraum folgendermaßen:

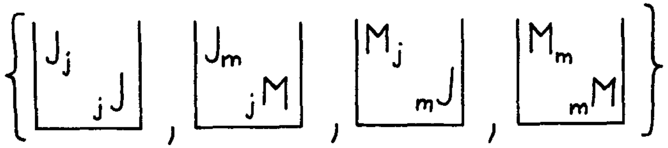
$$\{jj\ ,\ jm\ ,\ mj\ ,\ mm\}$$

Dabei bedeutet mj z.B., daß das ältere Kind ein Mädchen und das jüngere ein Junge ist. Wie wir unten sehen werden, reicht diese Darstellung für Problem c) nicht aus. Um die Unterschiede zwischen a), b) und c) zu verdeutlichen, benutzen wir folgendes Urnenmodell (wieder handelt es sich z.B. um eine Familie mit einem älteren Mädchen und einem jüngeren Jungen):

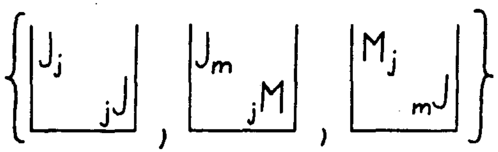
Die Urne repräsentiert die Familie. In der Urne sind zwei Kugeln, die den beiden Kindern entsprechen. Auf der einen Kugel steht M_j. Dies steht für Mädchen (M) mit jüngerem Bruder (Index j rechts von M). Analog steht ${}_mJ$ auf der zweiten Kugel für ihren Bruder, einen Jungen (J) mit einer älteren Schwester (Index m links).

Nun können wir unsere drei Probleme lösen.

a) Was hier ausgewählt wird, ist eine Familie (Urne) mit zwei Kindern (Kugeln). Mit dem o.a. Modell kann der Stichprobenraum folgendermaßen beschrieben werden:



Es ist bekannt, daß die Familie einen Sohn hat, und der Stichprobenraum reduziert sich auf:

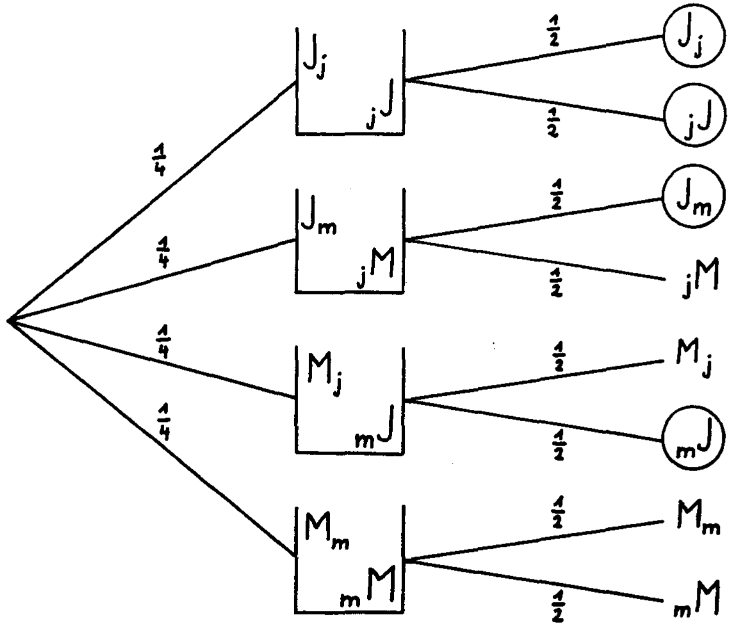


Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Familie einen weiteren Sohn hat, 1/3 (und nicht 1/2 wie der voreilige Schüler oben vermutete).

b) Dies ist ein Beispiel für einen zweistufigen Versuch. In der ersten Stufe wird zufällig eine Familie (Urne) der angegebenen Art ausgewählt, und in der zweiten Stufe wird aus dieser Familie (Urne) zufällig ein Kind (Kugel) ausgewählt. Das folgende Diagramm ist wohl die beste Beschreibung der möglichen

Ausgänge:

Wir betrachten die Ausgänge in Stufe zwei und markieren die uns interessierenden ("das Kind ist ein Junge") durch einen Kreis. Wie man sofort sieht, führt die Bedingung "falls das Kind in Stufe zwei ein Junge ist" in zwei von vier (gleich wahrscheinlichen) Fällen zu einer Familie mit zwei Söhnen zurück. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 1/2, was auch spontan einleuchtender erscheint als das Ergebnis von a).



c) Wichtig ist: hier wird nicht mehr eine Familie (Urne) mit zwei Kindern ausgewählt sondern ein Kind (Kugel), das zu einer solchen Familie (Urne) gehört. Kurz: wir können auf die Urnen verzichten und den Stichprobenraum folgendermaßen aufschreiben

$$\{J_j , {}_jJ , J_m , {}_jM , M_j , {}_mJ , M_m , {}_mM\},$$

dabei heißt z.B. ${}_jM$, daß ein Mädchen ausgewählt wurde und daß sie per Zufall aus einer Familie mit einem älteren Sohn kommt. Wieder werden die Ausgänge als gleich wahrscheinlich angenommen. Da bekannt ist, daß das ausgewählte Kind ein Junge ist, reduziert sich der Stichprobenraum auf

$$\{J_j , {}_jJ , J_m , {}_mJ\}$$

und die Wahrscheinlichkeit für einen Bruder ist daher 2/4 = 1/2. Die Antworten zu b) und c) sind gleich - die zugrundeliegenden Versuche sind es nicht.

Konsequenzen

Vor der Anwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung vergewissere man sich, daß der Versuch wohldefiniert und der zugehörige Stichprobenraum einwandfrei beschrieben ist.

Ausblicke

Ähnliche Fragen können für Familien mit drei Kindern formuliert werden. Bei Familien mit einer größeren Anzahl von Kindern würde unser Lösungsansatz wohl zu beschwerlich sein. Aber die Problematik wird hoffentlich schon vorher deutlich geworden sein.

Literaturhinweis

G. Laporte, R. Quellet and F. Lefebure (1980). Note 64.3: A Paradox in Elementary Probalility Theory, Mathematical Gazette, 64, 53 - 54.

Originaltitel in 'Teaching Statistics' Vol. 4 (1982) Nr. 3
Families, Children and Probabilities.