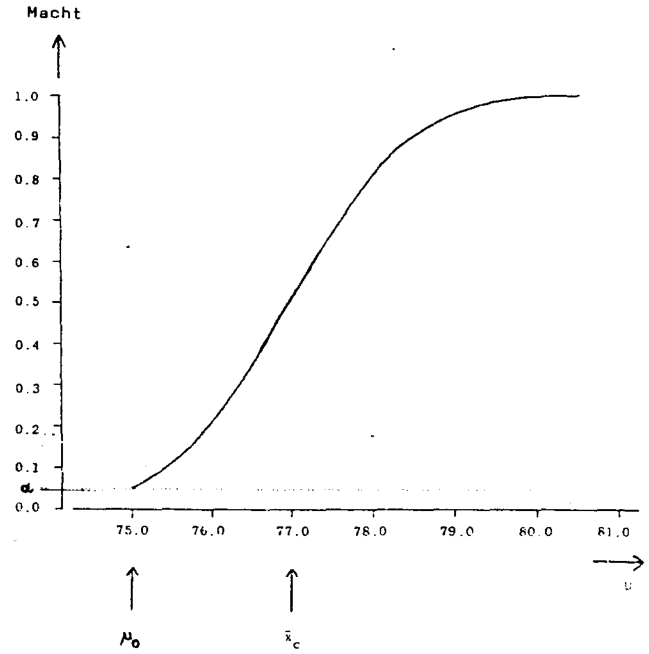
Ein einfaches Verfahren zur Gewinnung des Schaubilds der Gütefunktion

nach E. Shoesmith, University College at Buckingham
Originaltitel in 'Teaching Statistics" Vol. 5 (1983), Nr. 3: Simple Power Curve Constructions
Übersetzung: F. und G. Fillbrunn

Der Hypothesentest kann in einführenden Kursen für Schüler ein schwer zu verstehendes Thema sein. In diversen Veröffentlichungen wurden Vorschläge gemacht, wie die Schülerprobleme bewältigt werden können. Eine der Hauptschwierigkeiten besteht darin, den Schülern die fundamentale Asymmetrie des nach NEYMAN-PEARSON als Entscheidungsverfahren durchgeführten Hypothesentests zu erklären. Es besteht strukturell ein wesentlicher Unterschied zwischen der *Nullhypothese* H_0 und der *Alternativhypothese* H_1, der sich in den Testergebnissen 'H_0 wird abgelehnt' und 'H_0 wird nicht abgelehnt' widerspiegelt.

Verständnis für diese Asymmetrie und ihre Konsequenzen kann nur erreicht werden, wenn der Begriff der Gütefunktion eines Tests - oder ein entsprechender Begriff - eingeführt wird. Vertrauensintervalle bieten durch ihre Länge einen Anhaltspunkt für die 'Empfindlichkeit' des daraus gezogenen Schlusses. Bei Hypothesentests dagegen hat man von vornherein nichts gleichwertiges, es sei denn, es wird die Gütefunktion untersucht. Derartige Berechnungen sind in der Regel schwierig, wenn man von den einfachsten statistischen Modellen absieht. Sogar bei diesen sind sie in der Regel langatmig. Vermutlich ist dies der Grund, weshalb trotz der Bedeutung der Gütefunktion elementare Statistikwerke dieses Thema auf bestenfalls zwei bis drei Seiten mit einer erläuternden Berechnung und einer Darstellung eines Schaubilds abtun.

Weil viele Modelle für statistische Schlüsse, die in einführenden Statistikkursen behandelt werden, auf der *Normalverteilung* basieren, können die Konstruktion und Darstellung des Schaubilds der Gütefunktion mit Wahrscheinlichkeitspapier sehr vereinfacht werden. Bei einem sich auf die Normalverteilung stützenden einseitigen Hypothesentest (Lehrbücher stellen die Gütefunktion gewöhnlich für einseitige und nicht für zweiseitige Tests dar, weil diese etwas einfacher sind) hat das Schaubild der Gütefunktion die Gestalt einer Gaußschen Kumulativverteilung, die sich vom Signifikanzniveau α bis zur Wahrscheinlichkeit 1 erstreckt. Deshalb läßt sich die Gütefunktion auf Wahrscheinlichkeitspapier als gerade Linie zeichnen.

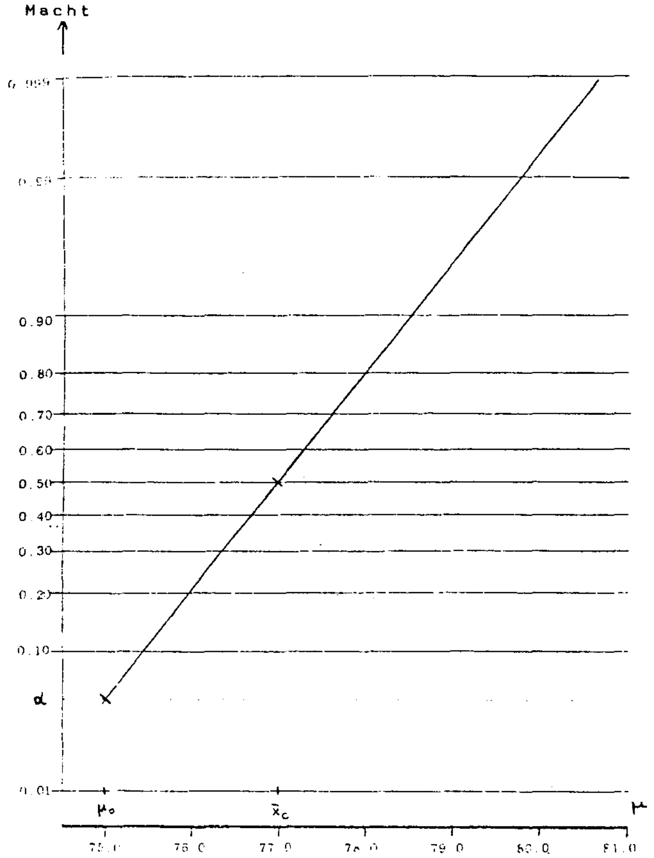


Figur 1: Schaubild der Gütefunktion in einem normalen Gittersystem

Figur 1 zeigt das übliche Schaubild der Gütefunktion, dargestellt in einem normalen Gittersystem, für den einfachen Fall des Testens einer Hypothese über den Erwartungswert μ bei bekannter Varianz σ^2 und bei normalverteilter Grundgesamtheit. Der Test ist einseitig auf dem Signifikanzniveau α = 0,05 und hat mit σ^2 = 50, n = 35 die Hypothesen

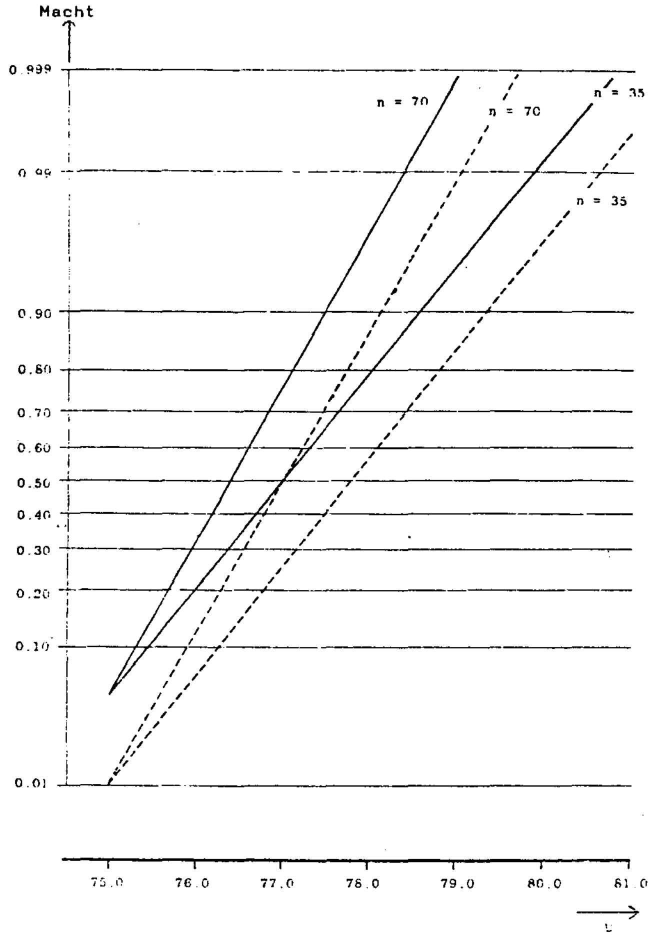
$$H_0: \mu \leq 75$$

$$H_1: \mu > 75$$



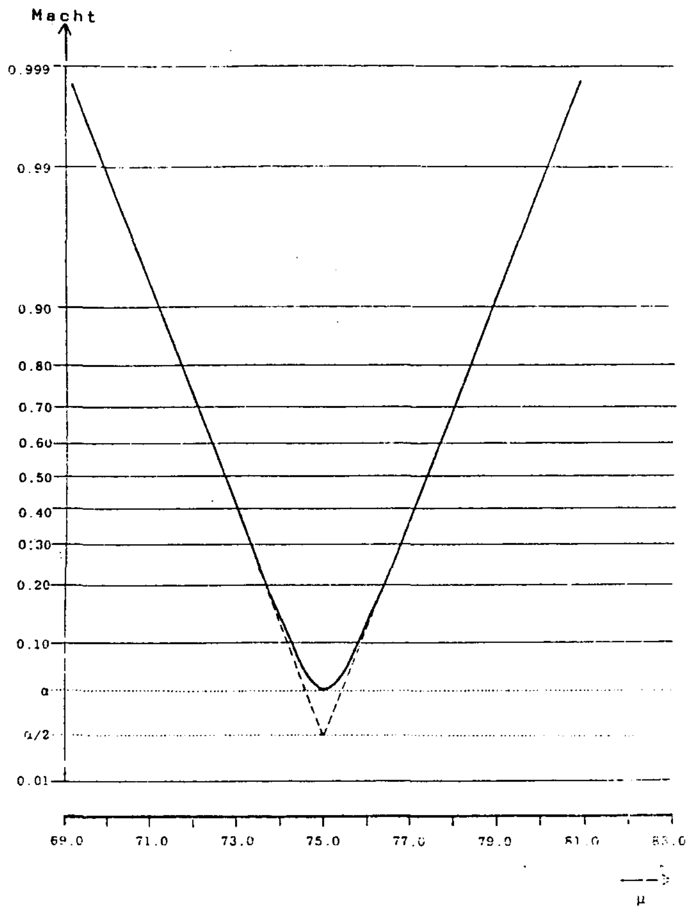
Figur 2: Schaubild der von Figur 1 stammenden Gütefunktion dargestellt auf Wahrscheinlichkeitspapier

In der Zeichnung ist μ_0 (= 75) der Wert von μ, für welchen die Gütefunktion das Minimum hat. x (= 75 + 1,65 50/35 = 77) ist die Grenze des Ablehnungsbereichs. Für einen Stichprobenwert $x > x_c$ wird H_0 auf dem 0,05-Niveau verworfen. Um das Schaubild der Gütefunktion genau zeichnen zu können, muß man die Macht 1 = $\beta(\mu)$ für eine Serie von Werten für μ bei wahrer Alternativhypothese H_1 berechnen.



Figur 3: Abhängigkeit der Gütefunktion vom Stichprobenumfang n und vom Signifikanzniveau. H_0 und H_1 stimmen mit denen von Figur 1 überein. Die durchgezogenen Linien gehören zu Tests mit α = 0,05, die gestrichelten Linien zu solchen mit α = 0.01.

Auf Wahrscheinlichkeitspapier ist das Schaubild eine gerade Linie (siehe Figur 2). Für die Konstruktion sind lediglich zwei Punkte zu bestimmen, die bei geschickter Wahl nur wenig Rechnerei erfordern. Zum Beispiel gilt für $\mu = \mu_0$ $1 - \beta = \alpha$ und $1 - \beta = \frac{1}{2}$, wenn μ bei wahrer Alternativhypothese mit dem kritischen Testwert x_c zusammenfällt (diese beiden Punkte sind in Figur 2 durch Kreuze markiert).



Figur 4: Schaubild der Gütefunktion eines zweiseitigen Tests mit $\alpha = 0{,}05$ und H_0: $\mu = 75$, H_1: $\mu = 75$. Die durchgezogene Linie stellt das richtige Schaubild der Gütefunktion dar. Die Konstruktion der gestrichelten Linie basiert auf zwei einseitigen Tests mit $\alpha = 0{,}025$. (Für $1 - \beta \geq 0{,}20$ stimmt die gestrichelte Linie mit der durchgezogenen überein.)

Da bei Vorliegen der Normalverteilung die Schaubilder von Gütefunktionen auf Wahrscheinlichkeitspapier ganz leicht gezeichnet werden können, kann die Abhängigkeit der Gütefunktion vom Stichprobenumfang und vom Signifikanzniveau ohne weiteres untersucht werden (siehe Figur 3).

Ein zweiseitiger Test mit dem Signifikanzniveau α ist nicht ganz so einfach zu erledigen, aber auch hier leisten gerade Linien gute Dienste. Für einen zweiseitigen Test mit dem Signifikanzniveau α sind die beiden Halbgeraden, deren Konstruktion auf zwei einseitigen Tests mit dem Signifikanzniveau $\frac{\alpha}{2}$ beruht, eine gute Approximation des Schaubilds der Gütefunktion, falls μ nicht sehr nahe bei μ_0 liegt (siehe dazu Figur 4). Liegt μ in der nächsten Umgebung von μ_0, sind die tatsächlichen Werte maximal doppelt so groß wie die durch die Halbgeraden gewonnenen Werte.