

DREHEN WIR DEN SPIESS UM

von C. A. Beam, Iowa State University
Originaltitel in 'Teaching Statistics', Vol. 4 (1982)
Nr. 3: Putting the Shoe on the Other Foot
Übersetzung: B. Wollring

Dargestellt wird ein Beispiel für einen Induktionsbeweis in der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung zum Beweis eines Satzes aus der Arithmetik.

Im allgemeinen werden als Hilfsmittel zu Beweisen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ergebnisse aus anderen Gebieten der Mathematik zu Hilfe genommen. Nehmen wir zum Beispiel an, folgender Satz sei zu beweisen:

Satz: Ist X eine diskrete Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } X = 1, \dots, n, \text{ wobei } n \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Dann ist } E(X) = \frac{n+1}{2}.$$

Eine Beweismethode besteht darin, direkt die Definition des Erwartungswertes einer diskreten Zufallsgröße zu benutzen und als Ergebnis aus der Arithmetik zu verwenden, daß die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $n(n+1)/2$ beträgt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}, \text{ wobei } X_i = i \text{ ist,} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n}, \text{ aufgrund des erwähnten Ergebnisses} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Als methodische Variante kann man auch umgekehrt vorgehen: Zunächst zeigt man induktiv $E(X) = (n+1)/2$ und benutzt dieses Ergebnis dann zum Beweis von:

$$\sum_{i=1}^n X_i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ mit } X_i = i$$

Um nun $E(X) = (n+1)/2$ induktiv zu beweisen, zeigen wir zunächst den "Induktionsschritt":

Ist X eine diskrete Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } X = 1, \dots, n, \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und ist $E(X) = (n+1)/2$, so gilt für eine diskrete Zufallsgröße X' mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(X') = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{für } X' = 1, \dots, n, n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{die Gleichung } E(X') = \frac{(n+1)+1}{2}.$$

Dazu gehen wir direkt auf die Definition des Erwartungswertes diskreter Zufallsgrößen zurück. Es gilt:

$$E(X') = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{n+1} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n+1} + \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

Daraus folgt:

$$\frac{n+1}{n} E(X') = \frac{n+1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n+1} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

Und daher:

$$\frac{n+1}{n} E(X') = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} + \frac{X_{n+1}}{n}$$

Da aber nach Voraussetzung $E(X) = (n+1)/2$ ist, folgt:

$$\frac{n+1}{n} E(X') = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{n}$$

$$\text{Und daraus ergibt sich } E(X') = \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)+1}{2}.$$

Um den Induktionsbeweis zu vervollständigen, zeigen wir noch als "Induktionsanfang", daß $E(X) = (n+1)/2$ für $n = 1$ gilt:

$$\text{Ist } n = 1, \text{ so ist } E(X) = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1+1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.

Wir haben also gezeigt, daß $E(X) = (n+1)/2$ ist und benutzen diesen einfachen Satz aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung nun, um das arithmetische Ergebnis zu beweisen, daß die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist.

Dazu gehen wir folgendermaßen vor: Sei X eine diskrete Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } X = 1, \dots, n, \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist aufgrund des oben bewiesenen Satzes:

$$\sum_{i=1}^n X_i = E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Und damit ist $\sum_{i=1}^n X_i = \frac{n+1}{2}$ bewiesen.

Diese Darstellung zeigt nicht nur den Nutzen von Induktionsbeweisen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern illustriert auch gut die Zusammenhänge zwischen "klassischer" mathematischer Analysis und dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dieses Beispiel könnte besonders für Lehrer interessant sein, deren Schüler von klassischer Mathematik nicht soviel verstehen; denn es fordert vom Lehrer, den Induktionsbeweis vorzustellen und den Satz über die Summe der ersten n natürlichen Zahlen zu erarbeiten, und es kann als Aufhänger für die Diskussion der Wechselwirkung von klassischer Mathematik und Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen. "Dreht man den Spieß um", so kann man den Schülern, die etwas elementare Wahr-

scheinlichkeitsrechnung kennen, ein wenig vom inneren Zusammenhang des weiten Feldes vermitteln, das die Mathematik darstellt.