

VORSCHLÄGE FÜR ABITURAUFGABEN AUS DER STOCHASTIK*)

H. ALTHOFF

In zunehmendem Maße wird in den Kursen der Sekundarstufe II Stochastik unterrichtet. Vielen Kollegen bereitet dabei das Auffinden geeigneter Abituraufgaben in der Stochastik besondere Schwierigkeiten. Das liegt zunächst einmal daran, daß bisher nur wenige Erfahrungen auf diesem Gebiet gemacht wurden und deshalb auch nur vergleichsweise kleine Sammlungen von Abituraufgaben aus der Stochastik existieren. Es kommt hinzu, daß beim Lösen stochastischer Probleme häufiger als in den anderen Gebieten das Auffinden eines geeigneten Ansatzes das Hauptproblem darstellt. Als besonders schwierig erweist es sich, für einsemestrige Grundkurse (hier stehen bei 3 Stunden pro Woche erfahrungsgemäß nur etwa 40 bis 50 Unterrichtsstunden zur Verfügung) geeignete Abituraufgaben zu finden. Das liegt vor allem daran, daß ein großer Teil eines solchen Kurses für elementare Dinge verwendet werden muß und es im allgemeinen nicht zu erreichen ist, daß die Schüler eine ausreichende Sicherheit und Selbständigkeit im Lösen von Problemen auch aus der beurteilenden Statistik erreichen.

An Abituraufgaben (insbesondere in der schriftlichen Prüfung) werden natürlich besondere Anforderungen gestellt (z.B. in Prüfungsordnungen); dazu gehören z.B.:

- Die Aufgaben sollen einen angemessenen Umfang und Schwierigkeitsgrad haben; z.B. hat der Prüfling in Nordrhein-Westfalen im schriftlichen Abitur pro Aufgabe eine durchschnittliche Bearbeitungszeit von 100 Minuten im Leistungskurs und 90 Minuten im Grundkurs.
 - Die Teilaufgaben einer Aufgabe müssen einerseits im Problemzusammenhang stehen, andererseits aber auch so weit wie möglich voneinander unabhängig gelöst werden können.
 - Der Schwierigkeitsgrad der Teilaufgaben muß variieren, um der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der Prüflinge gerecht zu werden.
- Darüber hinaus ist es wünschenswert, wenn die Aufgaben auch noch einige der folgenden Eigenschaften erfüllen:
- In den Teilaufgaben kommen verschiedene Aufgabentypen hinsichtlich der benutzten Hilfsmittel und Kalküle sowie der verwendeten Lösungsstrategien vor.
 - Es besteht die Möglichkeit, die gestellten Aufgaben auf verschiedene Arten zu lösen.
 - Die zu untersuchenden Probleme sind weitgehend praxisrelevant; für die Stochastik bedeutet das z.B., daß nicht alle Teilaufgaben reine Urnenaufgaben sind oder nur kombinatorische Probleme beinhalten.
 - Die Schüler müssen die formal berechneten Ergebnisse noch inhaltlich interpretieren oder kritisch beurteilen.

*) Sonderdruck aus Schriftenreihe Didaktik der Mathematik
 Univ. f. Bildungswissenschaften, Klagenfurt, Band 3
 3. Intern. Symp. f. Didaktik der Mathematik 29.9-3.10 1980
 Verlag Teubner Stuttgart Nachdruck mit Genehmigung des Verlags.

tieren oder kritisch beurteilen.

Es ist sicherlich sehr problematisch, fremde Abituraufgaben hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit und Güte zu beurteilen; man kennt häufig weder die unterrichtlichen Voraussetzungen noch die Prüfungsbedingungen. Trotz aller Vorbehalte scheint mir jedoch die folgende Aufgabe 1, die in einem Grundkurs als Aufgabe in der schriftlichen Abiturprüfung gestellt wurde (vgl. [1], Seite 57), wenig geeignet zu sein, wenn man ihre Lösung mit den oben formulierten Anforderungen vergleicht.

Aufgabe 1:

In einem Topf befinden sich je 4 blaue, grüne, violette, gelbe, orangene, rote, weiße und schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln herausgenommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens eine blaue dabei ist?

- a) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe von Komplementärwahrscheinlichkeiten.
- b) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe von Binominalkoeffizienten.

Lösung zu Aufgabe 1:

Bezeichnet man mit E das Ereignis, daß mindestens eine blaue Kugel gezogen wird, so ergibt sich:

a)
$$E : \begin{array}{l} \frac{4}{32} \quad b \\ \frac{28}{32} \quad \bar{b} \end{array}$$
 oder auch:
$$\bar{E} : \frac{29}{32} \quad \bar{b} \quad \frac{27}{31} \quad b$$

$$P(E) = \frac{4}{32} + \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} = \frac{59}{248}$$
 $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{29}{32} \cdot \frac{27}{31} = \frac{59}{248}$

b)
$$P(E) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{0}}{\binom{32}{2}} = \frac{4 \cdot 28 + 6 \cdot 1}{496} = \frac{59}{248}$$

oder auch:
$$P(E) = 1 - \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = 1 - \frac{1 \cdot 378}{496} = \frac{59}{248}$$

Die folgenden drei Aufgaben habe ich selbst als Abituraufgaben im Grundkurs gestellt; auf weitere bewährte Originalabituraufgaben, insbesondere auch solche für Leistungskurse, muß ich leider an dieser Stelle aus Platzmangel verzichten. Für das Abitur 1977, aus dem Aufgabe 2 (schriftliches Abitur) und Aufgabe 4 (mündliches Abitur) stammen, waren die Schüler anhand des Lehrbuchs [2] etwa 55 bis 60 Stunden in Stochastik unterrichtet worden, für das Abitur 1980, aus dem Aufgabe 3 (schriftliches Abitur) stammt, etwa 70 bis 75 Stunden anhand des gleichen Lehr-

buchs mit einigen Ergänzungen ohne Lehrbuch zum Testen von Hypothesen und zur Approximation der Binomialverteilung durch die Laplaceschen Näherungsformeln. In der schriftlichen Abiturprüfung stehen in Nordrhein-Westfalen den Schülern im Grundkurs für 2 Aufgaben 3 Zeitstunden zur Verfügung; in der mündlichen Abiturprüfung trägt der Schüler die Lösung der Aufgabe (für die er 30 bis 45 Minuten Vorbereitungszeit hat) dem Prüfungsausschuß vor und tritt dann in ein Prüfungsgespräch mit dem Prüfer ein (Dauer der gesamten mündlichen Prüfung 20 bis 30 Minuten).

Aufgabe 2:

Eine Untersuchung auf Eignung für den Leistungssport sei durch folgende Aussagen charakterisiert:

Von den ungeeigneten Personen werden 98 % richtig und 2 % falsch eingestuft, von den geeigneten werden 95 % zugelassen und 5 % fälschlicherweise als untauglich hingestellt.

Aus einer großen Gruppe, von der 90 % für den Leistungssport geeignet sind, wird eine Person willkürlich herausgegriffen und untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Person

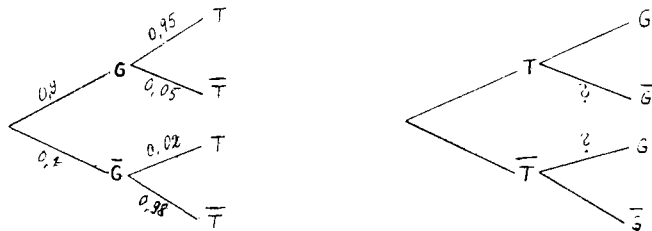
- a) leistungsfähig ist, obwohl sie als ungeeignet gekennzeichnet wird,
- b) leistungsunfähig ist, obwohl sie als leistungssportfähig eingestuft wird?
- c) Beurteilen Sie die Güte des Verfahrens.
- d) F sei ein Ereignis aus dem Stichprobenraum S mit $P(F) \neq 0$. Die Ereignisse E_1, E_2 und E_3 mögen eine Zerlegung von S bilden. Bekannt seien die Wahrscheinlichkeiten $P_{E_i}(F)$ und $P(E_i)$, $i = 1, 2, 3$. Geben Sie die Formeln für die Wahrscheinlichkeiten $P_F(E_i)$, $i = 1, 2, 3$ an und beweisen Sie diese. (Satz von Bayes)

Lösung zu Aufgabe 2 (in Kurzform):

G: Person geeignet für Leistungssport

T: Person als tauglich eingestuft

Die im Aufgabentext gegebenen Daten werden in das linke Baum-Diagramm eingetragen:



Unter zusätzlicher Benutzung des rechten Baum-Diagramms ergibt sich dann:

a)
$$P_{\bar{T}}(G) = \frac{P(\bar{T} \cap G)}{P(\bar{T})} = \frac{0,9 \cdot 0,05}{0,9 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,98} = 0,315$$

b)
$$P_{\bar{T}}(\bar{G}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{G})}{P(\bar{T})} = \frac{0,1 \cdot 0,02}{0,9 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,02} = 0,00233$$

- c) Der Test ist sehr vorsichtig angelegt: nur 0,233 % der als tauglich eingestuften Personen sind in Wirklichkeit ungeeignet. Dafür nimmt man in Kauf, daß durchschnittlich 31,5 % der als untauglich eingestuften Personen in Wirklichkeit doch für den Leistungssport geeignet sind.
- d) Anhand entsprechender Baum-Diagramme wie oben (die man noch zeichnen müßte!) ergibt sich

$$P_F(E_1) = \frac{P(E_1 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E_1) \cdot P_{E_1}(F)}{P(E_1) \cdot P_{E_1}(F) + P(E_2) \cdot P_{E_2}(F) + P(E_3) \cdot P_{E_3}(F)}$$

Für $P_F(E_2)$ und $P_F(E_3)$ erhält man analoge Formeln.

Aufgabe 3:

Ein Obsthändler vereinbart mit dem Lieferanten einer größeren Menge von Haselnüssen, daß er einen bestimmten Preisnachlaß bekommt, wenn "der Anteil p der im Inneren schon vertrockneten Nüsse 10 % der gesamten Lieferung übersteigt." Vereinbarungsgemäß soll das der Fall sein, wenn aus der Menge von 100 zufällig der Lieferung entnommenen Nüsse mehr als 10 im Innern schon vertrocknet sind.

- a) Warum kann man für die Anzahl X der vertrockneten Nüsse in der Stichprobe vom Umfang 100 mit einer Binomialverteilung rechnen, obwohl es sich bei der Stichprobe um eine Ziehung ohne Zurücklegen handelt? Interpretieren Sie p als Wahrscheinlichkeit.
- b) Wie groß ist das Risiko des Lieferanten, einen Preisnachlaß gewähren zu müssen, obwohl nur 10 % der Haselnüsse vertrocknet sind?
- c) Wie groß ist das Risiko des Händlers, keinen Preisnachlaß zu erhalten, obwohl 15 % der Nüsse vertrocknet sind?
- d) Was für ein Entscheidungsverfahren (statt des vereinbarten) müßte bei gleichem Stichprobenumfang 100 genommen werden, damit der Händler mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % zu Unrecht einen Preisnachlaß erhält?
- e) Für die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,1$ werde als Entscheidungsregel genommen: Verwirf $H_0 \iff X > 15$. Zeichnen Sie dafür den Graphen der Gütefunktion

$$g: [0;1] \rightarrow [0;1] \text{ mit } g(p) = \sum_{i=16}^{100} b(100;p;i) .$$

- f) Erläutern Sie daran, bezogen auf das obige Beispiel mit den Haselnüssen, die inhaltliche Bedeutung der Funktionswerte $g(p)$.
- g) Was bedeutet bei dem Beispiel die Sprechweise "Die Nullhypothese $H_0: p \leq 0,1$ soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden"?

Lösung zu Aufgabe 3 (in Kurzform):

- a) Kleine Stichprobe aus großer Gesamtheit \Rightarrow hypergeometrische Verteilung \approx Binomialverteilung.
 p ist für die einzelne Nuß die Wahrscheinlichkeit, im Innern schon vertrocknet zu sein.
- b) $P_{p=0,1}(X > 10) = 1 - P_{p=0,1}(X \leq 10) = 0,41684$ (aus Tabelle in [3]) \Rightarrow Risiko $\approx 42\%$
- c) $P_{p=0,15}(X \leq 10) = 0,09945$ (aus Tabelle in [3]) \Rightarrow Risiko $\approx 10\%$
- d) Für die Entscheidungsregel der Form Preisnachlaß $\Leftrightarrow X > c$ sind alle $c \in \mathbb{N}$ gesucht mit $P_{p=0,1}(X > c) \leq 0,05$. Nach einigen Äquivalenzumformungen ergibt sich mit Hilfe einer Tabelle $c \geq 15$.
- e) Die Funktionswerte $g(p) = 1 - \sum_{i=0}^{15} b(100;p;i)$ können für mehrere Werte von p einer Tabelle aus [3] entnommen und in ein Koordinatensystem eingetragen werden. (Die graphische Darstellung fehlt hier aus Platzgründen.)
- f) Für $p \leq 0,1$ bedeutet $1 - g(p)$ das Risiko des Lieferanten, zu Unrecht einen Preisnachlaß gewähren zu müssen.
 Für $p > 0,1$ bedeutet $1 - g(p)$ das Risiko des Händlers, zu Unrecht keinen Preisnachlaß zu bekommen.
- g) Es soll die Entscheidungsregel von der Form Verwirf $H_0 \Leftrightarrow X > c$ gefunden werden, für die gilt: c ist die kleinste natürliche Zahl, so daß $P_{p=0,1}(X > c) \leq 0,05$ erfüllt ist.

Aufgabe 4:

In einer Vereinsversammlung von 125 Mitgliedern sind sich die 25 Mitglieder einer bestimmten Abteilung einig, A als Vorsitzenden zu wählen. Die restlichen 100 schwanken noch zwischen den Kandidaten A und B . Welche Chancen hat A , mehr als die Hälfte aller Stimmen zu bekommen, wenn angenommen wird, daß die restlichen 100 Mitglieder unabhängig voneinander abstimmen und

- a) sich rein zufällig für einen der beiden Kandidaten entscheiden,
 b) mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 sich für A entscheiden,

- c) mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 sich für A entscheiden?
 Beurteilen Sie die Ergebnisse.

Lösung zu Aufgabe 4:

Das Abstimmen der restlichen 100 Versammlungsteilnehmer kann unter den gemachten Annahmen als Bernoulli-Prozeß angesehen werden. Die Anzahl X der A-Wähler unter diesen 100 Personen ist dann eine binomial verteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 100$ und a) $p = 0,5$ bzw. b) $p = 0,6$ bzw. c) $p = 0,4$. Da A insgesamt mindestens 63 Stimmen zur absoluten Mehrheit benötigt, fehlen ihm von den 100 Mitgliedern noch mindestens 38 Stimmen. Gesucht ist also $P(X \geq 38) = 1 - \sum_{i=0}^{37} b(100;p;i)$. Eine Tabelle aus [3] liefert a) 0,99398, b) $\geq 0,999995$, c) 0,69319 . Bei a) ist es also fast sicher, bei b) praktisch sicher, bei c) immer noch relativ wahrscheinlich, daß A die absolute Mehrheit der Stimmen erhält. Eine relativ kleine Minderheit (hier 25 von 125 Personen) hat bei Einigkeit offenbar einen großen Einfluß.

Als mögliche Anschlußfragen für ein Prüfungsgespräch bieten sich hier an:

- Begründung der Formel für die Binomialverteilung
- hypergeometrische Verteilung
- Erwartungswert $E(X)$, insbesondere $E(X) = np$ bei binomialverteiltem X
- Laplacesche Näherungsformeln
- Vorteile der Benutzung spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Literatur:

- [1] IPTS-Kataloge: Reifeprüfungsaufgaben 1973 im Fach Mathematik (Gymnasien Schleswig-Holsteins) 1974 Kiel
- [2] Althoff/Koßwig: Wahrscheinlichkeitsrechnung für Grundkurse 1975 Düsseldorf, Braunschweig
- [3] Barth u.a.: Tabellen zur Stochastik, 1975 München