Zwillinge und andere Mehrlinge beim Lotto

PEGGY DAUME UND MICHAEL SCHMITZ, FLENSBURG

Zusammenfassung: *Bei der Betrachtung von Lotto-Ziehungen beobachtet man hin und wieder das Auftreten von direkt benachbarten Zahlen in einer Ziehung. Achtet man bewusst auf dieses Phänomen, so wundert man sich, wie häufig es vorkommt. Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von zwei benachbarten Zahlen („Zwillinge“) bei einer Lotto-Ziehung ungefähr 50 %, d. h. bei etwa jeder zweiten Ziehung taucht mindestens ein Zwilling auf. Wir betrachten hier verschiedene Wege, die es ermöglichen, die genannte Wahrscheinlichkeit sowohl mit Schülern[1] als auch mit Studierenden zu berechnen. Darüber hinaus gehen wir der Frage nach, ob die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von mindestens drei aufeinander folgenden Zahlen ebenfalls unerwartet groß ist.*

1 Einleitung

Im Schulunterricht und in universitären Grundvorlesungen wird die Betrachtung des Lottospiels meistens nur auf die Bestimmung der Chancen für sechs (bzw. 5, 4, 3) Richtige reduziert. Unseres Erachtens bietet diese Thematik viele weitere lohnenswerte Aspekte wie z. B. die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Zwillingen – ein Problem wie es u. a. Arthur Engel (1973) und Ulrich Krengel (2005) formulieren – oder die Untersuchung von mehr als zwei benachbarten Zahlen bei einer Ziehung. Wir gehen im vorliegenden Artikel zunächst auf die Chancen für Zwillinge ein. Auf einem elementaren, etwas längeren Weg zählen wir die Anzahl der interessierenden Ergebnisse und bestimmen so die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Dieses Vorgehen ist sicherlich nicht nur stärkeren Schülern zugänglich. Des Weiteren erhalten wir so ein Ergebnis, welches es uns ermöglicht, durch Rückschau einen weiteren, sehr eleganten Weg zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit herzuleiten. Zentrales Element ist hierbei eine bijektive Abbildung zwischen zwei Ereignismengen, was diese Methode eher im Bereich der Hochschulmathematik verortet. Wir zeigen jedoch eine Variante auf, die sich auf ein Minimum von Begriffen beschränkt und so auch Eingang in die Schule finden kann.

Anschließend beantworten wir die in der Zusammenfassung gestellte Frage nach der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von mindestens drei benachbarten Zahlen bei einer Ziehung.

Dies geschieht erneut auf elementarem Weg durch Zählen von günstigen bzw. ungünstigen Ergebnissen. Hierzu werden die Chancen einzeln für genau sechs, genau fünf, genau vier und genau drei benachbarte Gewinnzahlen berechnet und addiert.

Die Betrachtung von sechs benachbarten Gewinnzahlen ist zwar trivial, liefert uns aber die Idee für eine Methode, um die Frage nach fünf und vier benachbarten Zahlen anzugehen. Bei der Anwendung dieser Methode auf Drillinge ergibt sich zunächst ein Problem, das wir aber durch Erweiterung derselben bewältigen. Insgesamt ist der Lösungsweg somit gut geeignet, um Schülern und Studierenden die Strategie des Zerlegens einer größeren Aufgabe in einfachere Teilschritte aufzuzeigen.

Verwendete Modellierung

Es werden sechs Zahlen zufällig aus den Zahlen von 1 bis 49 ohne Zurücklegen gezogen. Da der Reihenfolge der Zahlen keine Beachtung zukommt, können wir jede Ziehung aufsteigend anordnen. Als Ergebnisraum verwenden wir daher

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_6) \mid 1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_6 \le 49\}.$$

Bekanntlich gilt

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = 13.983.816.$$

Wir nehmen alle möglichen Ziehungen als gleichwahrscheinlich an und definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß P durch die folgende Festlegung:

$$\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Des Weiteren sei X die Zufallsgröße, die einer Ziehung die Länge der größten in ihr auftauchenden Serie aufeinanderfolgender Zahlen zuordnet. Z. B. ist $X(4, 5, 6, 37, 38, 45) = 3$ und nicht 2 oder etwa 5.

2 Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen

Rex Watson (1997) stellte in seinem Artikel mit dem – wie er ihn nennt – „kurzen Weg“ eine sehr elegante Methode vor, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von mindestens zwei aufeinanderfolgenden Zahlen bei einer Lotto-Ziehung zu berechnen. Er räumt dabei ein, dass dieser ohne die Kenntnis des Ergebnisses sicher schwer zu finden sei und erklärt, er habe zunächst durch systematisches Zählen aller Möglichkeiten für das Gegenereignis einen „Lösungs-Kandidaten“ gefunden. Die „Rückschau“ ermögliche es, den „kurzen Weg“ zu finden. Da wir die Meinung von Rex Watson diesbezüglich teilen, wollen wir zunächst eine Möglichkeit vorstellen, wie „der lange Weg“ aussehen könnte, um anschließend den kurzen auch richtig würdigen zu können.

2.1 Ergebnisse zählen – der lange Weg

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$ betrachten wir das Gegenereignis und bestimmen die Wahrscheinlichkeit $P(X < 2)$. Wir zählen also alle möglichen Ziehungen, in denen keine benachbarten Zahlen unter den Gewinnzahlen auftreten. Dafür rollen wir das Problem von hinten und in mehreren Schritten auf.

Schritt 1: Wir stellen uns vor, die ersten fünf Zahlen einer Ziehung ohne Nachbarn lägen bereits vor. Diese fünf Zahlen sollen kleinstmöglich sein, d. h. unsere Ziehung lautet $(1, 3, 5, 7, 9, z)$. Wir überlegen uns nun, wie viele Möglichkeiten es für die letzte Zahl z gibt. Offenbar kann z aus der Menge $\{11, 12, \ldots, 49\}$ beliebig gewählt werden. Wir erhalten also insgesamt

39 Möglichkeiten.

Schritt 2: In diesem Schritt gehen wir davon aus, dass die ersten vier Zahlen bereits kleinstmöglich vorliegen. Unsere Ziehung lautet folglich $(1, 3, 5, 7, y, z)$. Es müssen nun die Möglichkeiten gezählt werden, die für die letzten beiden Zahlen y und z verbleiben. Den Fall $y = 9$ haben wir bereits in Schritt 1 betrachtet, d. h. es verbleiben 39 Möglichkeiten für z. Für $y = 10$ können wir z aus der Menge $\{12, \ldots, 49\}$ wählen, es bleiben also 38 Zahlen übrig. Ist $y = 11$, gibt es für die Wahl von z aus $\{13, \ldots, 49\}$ noch 37 Möglichkeiten. Diese Überlegungen lassen sich weiter fortsetzen, so dass wir insgesamt

$$39 + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{39} i = \frac{39 \cdot 40}{2} = 780$$

Möglichkeiten erhalten, $(1, 3, 5, 7, y, z)$ zu einer zwillingsfreien Ziehung zu ergänzen.

Schritt 3: Wir fixieren die ersten drei Zahlen – ebenfalls wieder kleinstmöglich. Wir betrachten also die Ziehung $(1, 3, 5, x, y, z)$ und zählen alle Möglichkeiten, die Zahlen x, y und z zu wählen. Den Fall $x = 7$ haben wir bereits in Schritt 2 betrachtet, hierfür gibt es $\sum_{i=1}^{39} i$ Möglichkeiten. Für $x = 8$ können wir ebenfalls auf unsere Überlegungen aus Schritt 2 zurückgreifen: Wenn wir mit der Summation erst ab $y = 10$ starten, erhalten wir nur noch $\sum_{i=1}^{38} i$ Möglichkeiten für die Wahl der übrigen Zahlen. Diese Reihe können wir fortführen: Für $x = 9$ erhalten wir $\sum_{i=1}^{37} i$ Möglichkeiten, für $x = 10$ erhalten wir $\sum_{i=1}^{36} i$ usw.

Insgesamt kommen wir nun auf

$$\sum_{i=1}^{39} i + \sum_{i=1}^{38} i + \ldots + \sum_{i=1}^{1} i = \sum_{j=1}^{39} \sum_{i=1}^{j} i$$

Möglichkeiten, $(1, 3, 5, x, y, z)$ zu einer Ziehung zu ergänzen, die keinen Zwilling enthält.

Wir könnten nun die einzelnen Schritte weiter verfolgen, bis wir im Schritt 6 die Anzahl aller möglichen Ziehungen, die keinen Zwilling enthalten, bestimmt hätten (im Schritt 6 wäre keine Zahl mehr vorgegeben). Wir werden dies nicht durchführen, sondern stattdessen eine sinnvolle Vermutung anstellen, wie es weitergehen müsste. Aus unseren bisherigen Überlegungen erwarten wir in Schritt 4

$$\sum_{k=1}^{39} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} i$$

Möglichkeiten, $(1, 3, w, x, y, z)$ zu einer Ziehung ohne Zwilling zu ergänzen.

Das sieht beeindruckend aus. In Schritt 6 hätten wir es schlussendlich mit fünf ineinander geschachtelten Summenzeichen zu tun! Wir schreiben das lieber gar nicht erst auf, sondern versuchen stattdessen, die Mehrfachsummen an einem kleineren Beispiel zu verstehen.

Mehrfachsummen

In Schritt 2 haben wir das Summenzeichen bereits mit Hilfe der Summenformel von Gauß beseitigt. Wir betrachten das Ergebnis von Schritt 3 und vereinfachen zunächst auf dieselbe Weise die innere Summe:

$$\sum_{j=1}^{39} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{39} \frac{j(j+1)}{2}$$

Durch Auflösen der Klammer und trennen der Summe erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{39} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{39} j^2 + \sum_{j=1}^{39} j \right).$$

Die Anwendung einer Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen[2] sowie der Summenformel von Gauß liefert uns:

$$\sum_{j=1}^{39} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{1}{2} \left(\frac{39 \cdot 40 \cdot 79}{6} + \frac{39 \cdot 40}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{39 \cdot 40 \cdot 82}{6} \right) = \frac{39 \cdot 40 \cdot 41}{6}.$$

Dieses Ergebnis eignet sich gut, um eine Regel für die Mehrfachsummen abzuleiten. Wir betrachten die Resultate der ersten drei Schritte noch einmal vergleichend:

Schritt	Anzahl aller Möglichkeiten
1	$39 = \frac{39}{1!} = \binom{39}{1}$
2	$\sum_{i=1}^{39} i = \frac{39 \cdot 40}{2} = \frac{39 \cdot 40}{2!} = \binom{40}{2}$
3	$\sum_{j=1}^{39} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{39 \cdot 40 \cdot 41}{3!} = \binom{41}{3}$

Mit dieser wunderbaren Regelmäßigkeit lässt sich für das Ergebnis von Schritt 6 eine Vermutung aufstellen. Wir erwarten

$$\frac{39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44}{6!} = \binom{44}{6}$$

Möglichkeiten für die Anzahl aller Ziehungen ohne benachbarte Zahlen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit

Mit diesem Resultat können wir endlich die ursprünglich gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass in einer Lottoziehung mindestens ein Zwilling auftritt. Mit den bisherigen Ausführungen ergibt sich für das Gegenereignis – also eine Ziehung ohne wenigstens zwei aufeinanderfolgende Zahlen – die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(X < 2) = \frac{\binom{44}{6}}{\binom{49}{6}} \approx 50{,}5\ \%.$$

Insofern beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$ erstaunlicherweise ungefähr 49,5 %.

Hinweis: Bisher beruhen unsere Berechnungen nur auf einer plausiblen Vermutung für das Ergebnis. Da der im folgenden Abschnitt vorgestellte kurze Weg dieses aber mathematisch lückenlos bestätigt, muss uns das nicht stören. Der Beweis auf dem kurzen Weg ist zwar schwieriger zu finden, aber einfacher nachzuvollziehen. Es sollte ein Ziel sein, Mathematik-Lernenden zu vermitteln, dass mathematische Resultate und deren Beweise häufig auf diese Weise entstehen. Das Finden des Ergebnisses ist kompliziert und häufig mit Zweifeln behaftet, während der schlussendlich präsentierte Beweis elegant und wasserdicht ist. Was uns in mathematischen Fachtexten begegnet, kann man daher bildlich als „Destillat“ beschreiben. Am Ende sieht der Leser nur noch die reine Essenz und nichts, was ihn davon ablenken könnte.

2.2 Eine Bijektion – der kurze Weg

Nun kennen wir das Ergebnis und können uns den eleganten Weg dahin durch dessen Interpretation rückblickend erschließen. Im Zähler der Formel steht „6 aus 44“, d. h. die Anzahl der Möglichkeiten, sechs *nicht benachbarte* Zahlen aus der Menge {1, …, 49} zu wählen, stimmt mit der Anzahl der Möglichkeiten überein, sechs *beliebige* Zahlen aus der Menge {1, …, 44} zu wählen. Um unser Ergebnis zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass die folgenden Mengen die gleiche Anzahl an Elementen besitzen:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Alle Ziehungen} \\ \text{„6 aus 49“ } \textit{ohne} \\ \textit{benachbarte} \\ \text{Zahlen.}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\textit{Alle} \text{ Ziehungen} \\ \text{„6 aus 44“.}\end{array}\right\}$$

Einen formalen Beweis liefert z. B. Horst Gundel (1987). Wir verzichten hier auf eine Wiedergabe und erläutern stattdessen eine Version, die Begrifflichkeiten und Formalismus auf ein Minimum reduziert und somit auch Schülern einen Zugang zu dieser Problematik ermöglicht. Um Missverständnisse zu vermeiden: Bei dieser Darstellung handelt es sich nicht um einen Text für Schüler, sondern um einen Text, der von der Lehrkraft leichter in eine konkrete Unterrichtsplanung umgesetzt werden kann.

Wir wollen uns überlegen, dass es genauso viele Lotto-Ziehungen „6 aus 44“ gibt, wie es Lotto-Ziehungen „6 aus 49 ohne benachbarte Zahlen“ gibt. Dazu „verwandeln“ wir jede Ziehung von sechs Zahlen aus {1, …, 44} in eine Ziehung ohne Nachbarn aus der Menge {1, …, 49}. Wir achten dabei auf zwei Dinge:

(1) Keine zwei verschiedenen Ziehungen werden in dieselbe Ziehung verwandelt *(Injektivität)*.

(2) Wir erhalten jede zwillingsfreie „6 aus 49“-Ziehung als eine solche „Verwandlung“ *(Surjektivität)*.

Zunächst überlegen wir uns, wie wir die „kleinste Ziehung“ aus den Zahlen von 1 bis 44, also (1, 2, 3, 4, 5, 6), in eine Ziehung ohne Nachbarn verwandeln können. Die erste Stelle (also die Zahl 1) lassen wir unverändert. Damit die zweite Stelle (die 2) nicht mehr zu dieser benachbart ist, erhöhen wir sie um eins. Unsere neue zweite Stelle ist also die Zahl 3. Die nächste Stelle (die 3) müssen wir um zwei erhöhen, damit sie nicht mehr zur zweiten Stelle benachbart ist. Die neue dritte Stelle ist also die Zahl 4. Wir gehen weiter so vor. Wir erhöhen die vierte Stelle um drei, die fünfte Stelle um vier und die letzte

Stelle um 5. Die Verwandlung sieht insgesamt folgendermaßen aus:

alte Ziehung	Verwandlung	Verwandelte Ziehung
1	$\overrightarrow{+0}$	1
2	$\overrightarrow{+1}$	3
3	$\overrightarrow{+2}$	5
4	$\overrightarrow{+3}$	7
5	$\overrightarrow{+4}$	9
6	$\overrightarrow{+5}$	11

Das Ergebnis der Verwandlung lautet also (1, 3, 5, 7, 9, 11). Wir erhalten damit aus der kleinstmöglichen „6 aus 44“-Ziehung auch die kleinstmögliche zwillingsfreie „6 aus 49“-Ziehung. Schauen wir uns die „größtmögliche Ziehung“ aus der Menge {1, …, 44} also

$$(39, 40, 41, 42, 43, 44)$$

an. Wir verwandeln diese nach derselben Strategie:

alte Ziehung	Verwandlung	Verwandelte Ziehung
39	$\overrightarrow{+0}$	39
40	$\overrightarrow{+1}$	41
41	$\overrightarrow{+2}$	43
42	$\overrightarrow{+3}$	45
43	$\overrightarrow{+4}$	47
44	$\overrightarrow{+5}$	49

Das Ergebnis lautet (39, 41, 43, 45, 49). Wir sehen, dass unser Verfahren funktionieren könnte. Wir erhalten keine Zahl, die größer ist als 49, weil wir nur Ziehungen aus den Zahlen von 1 bis 44 verwandeln. Wir erhalten nur Ziehungen ohne Nachbarn, weil wir die einzelnen Stellen fortlaufend um eins mehr erhöhen. Wir haben bisher nur die kleinste und die größte Ziehung betrachtet, stellen anhand eines wahllosen Beispiels aber fest, dass unsere Methode auf jede Ziehung aus der Menge {1, …, 44} anwendbar ist:

$$(5, 9, 10, 24, 41, 44) \quad \underbrace{\longrightarrow}_{\text{Verwandlung}} \quad (5, 10, 12, 27, 45, 49)$$

Erfüllt unser Verfahren aber die geforderten Punkte (1) und (2)? Wir überprüfen das.

Zu (1): Wenn wir zwei unterschiedliche Ziehungen aus der Menge {1, …, 44} betrachten, dann unterscheiden sich diese mindestens an einer Stelle (wenn alle Stellen gleich sind, sind die Ziehungen identisch). An dieser Stelle unterscheiden sich aber auch die Verwandlungen, denn es wird dort dieselbe Zahl addiert (wenn man zu zwei unterschiedlichen Zahlen jeweils dieselbe Zahl addiert, erhält man unterschiedliche Ergebnisse).

Zu (2): Wir überlegen uns dies anhand eines Beispiels. Die Ziehung

$$(3, 5, 22, 31, 39, 49)$$

ist eine Ziehung aus den Zahlen von 1 bis 49 ohne Nachbarn. Wie können wir diese als Verwandlung einer „6 aus 44“-Ziehung erhalten? Wir machen das Verfahren einfach rückgängig: Die erste Stelle bleibt unverändert. An der zweiten Stelle ziehen wir 1 ab, an der dritten 2 usw. Wir erhalten mit

$$(3, 4, 20, 28, 35, 44)$$

diejenige Ziehung, deren Verwandlung unsere Beispielziehung ergibt. Auf diese Weise können wir zu jeder Ziehung ohne Nachbarn die Ausgangsziehung ermitteln. Die Tatsache, dass keine Nachbarn vorkommen, ist entscheidend, denn so wird sichergestellt, dass wir beim „Rückwärts-Verwandeln“ keine doppelten Zahlen erhalten.

Insgesamt haben wir nun gesehen, dass unser Verfahren tatsächlich funktioniert.

3 Wahrscheinlichkeit für mindestens drei aufeinanderfolgende Zahlen

3.1 Ziel und Problem

Im Folgenden interessiert uns die Frage, ob die Wahrscheinlichkeit, in einer Ziehung mindestens drei aufeinanderfolgende Zahlen zu erhalten, ebenfalls überraschend hoch ist.

Nachdem wir gesehen haben, wie gut die Frage nach der Chance für das Auftreten von Zwillingen beantwortet werden kann, sind wir optimistisch, das „Drillings-Problem“ ebenso zügig lösen zu können. Wir stellen jedoch fest, dass wir hierbei auf einige Probleme stoßen. Das liegt vor allen Dingen daran, dass das Gegenereignis, das im Falle des „Zwillings-Problems“ so griffig zu handhaben war, für diese neue Fragestellung keinen so einfachen Zugang mehr ermöglicht. Das Gegenereignis ist in diesem Fall die Menge aller Ziehungen, bei denen nicht mindestens drei benachbarte Gewinnzahlen auftreten. Man kann das auch so formulieren: Es handelt sich um die Menge aller Ziehungen, bei denen entweder überhaupt keine benachbarten oder genau zwei benachbarte

Zahlen auftreten. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit resultiert

$$P(X < 3) = P(X = 2) + P(X < 2)\,.$$

Wir kennen $P(X < 2)$ bereits, müssen aber feststellen, dass sich $P(X = 2)$ nicht so einfach bestimmen lässt. Die Gründe dafür versteht man besser, wenn man zunächst gesehen hat, wie man die Wahrscheinlichkeiten $P(X = i)$ für $i = 4, 5, 6$ berechnet[3].

Wir führen dies zunächst so durch, wie Maria Koth (1997) es für das österreichische Lotto „6 aus 45" gezeigt hat. Anschließend erweitern wir ihre Methode, um $P(X = 3)$ zu bestimmen. Durch Addition der zuvor bestimmten Wahrscheinlichkeiten können wir schlussendlich die Chance für mindestens drei aufeinander folgende Zahlen ausrechnen.

3.2 Genau sechs aufeinanderfolgende Zahlen

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau sechs aufeinanderfolgende Zahlen bei einer Lotto-Ziehung vorkommen. Dazu betrachten wir alle aufsteigend sortierten Sechslinge aus der Menge $\{1, \ldots, 49\}$. Mit den Ziehungen $(1, 2, 3, 4, 5, 6), \ldots, (44, 45, 46, 47, 48, 49)$ gibt es insgesamt 44 Möglichkeiten. Insofern ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = 6) = \frac{44}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{317.814}\,.$$

3.3 Genau fünf aufeinanderfolgende Zahlen

Wir möchten nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass in einer Ziehung genau fünf aufeinanderfolgende Zahlen vorkommen. Dazu betrachten wir zunächst alle (aufsteigend sortierten) „Fünflinge" aus der Menge $\{1, \ldots, 49\}$. Mit

$$(1, 2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5, 6), \ldots, (45, 46, 47, 48, 49)$$

gibt es insgesamt 45 Stück. Zu dem Fünfling $(1, 2, 3, 4, 5)$ kann die letzte Zahl aus der Menge $\{7, \ldots, 49\}$ beliebig gewählt werden (der „rechte Nachbar" 6 kann nicht gewählt werden, da sonst sechs Zahlen in einer Reihe vorliegen). Dafür gibt es 43 Möglichkeiten. Analog gilt für den Fünfling $(45, 46, 47, 48, 49)$: Die letzte zu ziehende Zahl kann aus der Menge $\{1, \ldots, 43\}$ gewählt werden, so dass es hierfür ebenfalls 43 Möglichkeiten gibt (der „linke Nachbar" 44 scheidet aus). Wie sieht es nun für die restlichen 43 Fünflinge aus? Für diese Fünflinge ist die Menge der Zahlen, aus denen die letzte Zahl gewählt werden kann, um ein Element kleiner als bei den beiden bisher betrachteten Fällen. Dies ist damit begründet, dass die verbleibenden Fünflinge jeweils einen linken und einen rechten Nachbarn besitzen, die nicht mehr gezogen werden dürfen, da sonst sechs Zahlen in einer Reihe vorlägen. So kann beispielsweise für den Fünfling $(8, 9, 10, 11, 12)$ für die letzte Zahl ein Element aus der Menge $\{1, \ldots, 6, 14, \ldots, 49\}$ gewählt werden. Hierfür gibt es also 42 Möglichkeiten. Aus den bisherigen Überlegungen ergibt sich, dass es

$$2 \cdot 43 + 43 \cdot 42 = 1.892$$

Möglichkeiten gibt, genau fünf aufeinanderfolgende Zahlen bei einer Lotto-Ziehung zu erhalten. Als Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ergibt sich

$$P(X = 5) = \frac{2 \cdot 43 + 43 \cdot 42}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}01\ \%$$

3.4 Genau vier aufeinanderfolgende Zahlen

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für genau vier aufeinanderfolgende Zahlen[4] können wir auf die Überlegungen aus 3.3 zurückgreifen. Mit

$$(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), \ldots, (46, 47, 48, 49)$$

gibt es insgesamt 46 aufsteigend sortierte Vierlinge. Zu dem Vierling $(1, 2, 3, 4)$ können die letzten beiden Zahlen aus der Menge $\{6, \ldots, 49\}$ beliebig gewählt werden. Dafür gibt es $\binom{44}{2}$ Möglichkeiten. Ebenso gibt es für den Vierling $\{46, 47, 48, 49\}$ genau $\binom{44}{2}$ Möglichkeiten, die letzten beiden Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 44\}$ zu wählen. Bei den restlichen 44 Vierlingen bleiben jeweils nur noch 43 Elemente übrig, aus denen die letzten beiden Zahlen gewählt werden können. Dafür gibt es $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten. Insgesamt haben wir also

$$2 \cdot \binom{44}{2} + 44 \cdot \binom{43}{2} = 41.624$$

Möglichkeiten, genau vier aufeinanderfolgende Zahlen bei einer Lotto-Ziehung zu erhalten. Als Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis resultiert

$$P(X = 4) = \frac{2 \cdot \binom{44}{2} + 44 \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}3\ \%\,.$$

Diskussion der Methode

Wir haben eine Methode gesehen, mit der man die Wahrscheinlichkeiten $P(X = i)$ für $i = 4, 5, 6$ bestimmen kann. Da wir bei der Berechnung von $P(X = 3)$ auf ein neues Problem stoßen werden, wollen wir an dieser Stelle zunächst unsere bisherigen Überlegungen reflektieren.

Mit den bereits bestimmten Wahrscheinlichkeiten $P(X = i)$ für $i = 4, 5, 6$ können wir nun auch

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

berechnen. Hätten wir uns das Ganze nicht einfacher machen können und auf ähnliche Weise unmittelbar $P(X \geq 4)$ bestimmen können? Zunächst scheint diese Zielsetzung fast einfacher. Wir betrachten wieder alle 46 Vierlinge. Zu dem Vierling (1, 2, 3, 4) können wir nun die letzten beiden Zahlen beliebig aus der Menge {5, …, 49} wählen, da wir ja nicht darauf achten müssen, ob ein Fünfling oder gar ein Sechsling entsteht. Wir haben hier also $\binom{45}{2}$ Möglichkeiten. Dies gilt ebenso für alle anderen Vierlinge, also erhalten wir insgesamt

$$46 \cdot \binom{45}{2}$$

Möglichkeiten. Aber Achtung! Diese Überlegung enthält einen Fehler. Wir haben für den Vierling (1, 2, 3, 4) die Auswahl {5, 6} als letzte Zahlen zugelassen. Auf diese Weise entsteht ein Sechsling, der aber erlaubt ist. Andererseits haben wir für den Vierling (3, 4, 5, 6) die Wahl {1, 2} als letzte beide Zahlen zugelassen. Es ergibt sich daraus jedoch dieselbe Ziehung wie zuvor. Wir haben diese eine Möglichkeit also doppelt gezählt. Doppelt? Wir können dieselbe Ziehung auch aus dem Vierling (2, 3, 4, 5) und den letzten beiden Zahlen {1, 6} erhalten. Was für ein Chaos! Wir müssten nun darüber nachdenken, wie viele Möglichkeiten wir doppelt oder dreifach gezählt haben und diese Anzahl wieder abziehen. Ob diese Zählarbeit nun wirklich Arbeit erspart, ist fraglich.

Auf ähnliche Probleme stoßen wir, wenn wir $P(X = 2)$ auf diese Weise bestimmen wollen. Es scheint kein sinnvoller Ansatz, zunächst alle Zwillinge zu zählen, denn aus den verbleibenden vier Zahlen, die noch gezogen werden, könnten ja weitere Zwillinge, Drillinge oder gar Vierlinge entstehen, die wir wieder abziehen müssten.

3.6 Genau drei aufeinanderfolgende Zahlen

Wir wollen nun $P(X = 3)$ bestimmen. Man beachte, dass „Doppel-Drillinge“ wie (3, 4, 5, 17, 18, 19) zugelassen sind. Wir beginnen wie gewohnt und betrachten zunächst alle Drillinge aus der Menge {1, …, 49}, also

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (47, 48, 49)\,.$$

Es gibt 47 derartige Drillinge. Für den Drilling (1, 2, 3) können die letzten drei Zahlen beliebig aus der Menge {5, …, 49} gewählt werden. Dieser liefert uns – genauso wie der Drilling (47, 48, 49) – also $\binom{45}{3}$ Möglichkeiten. Doch Stopp: Wir haben bereits die Möglichkeit (1, 2, 3, 47, 48, 49) doppelt gezählt. Darauf müssen wir später noch einmal zurückkommen. Wir betrachten zunächst die verbleibenden 45 Drillinge. Für diese können aufgrund der linken und rechten Nachbarn, die es zu vermeiden gilt, die letzten drei Zahlen jeweils nur aus einer Menge mit 44 Elementen gewählt werden. So bleiben z. B. für den Drilling (7, 8, 9) nur die Elemente {1, …, 5, 11, …, 49} für die Ergänzung zu einer zugelassenen Ziehung übrig. Es gibt also jeweils $\binom{44}{3}$ Möglichkeiten, die verbleibenden 45 Drillinge zu einer Ziehung mit genau drei aufeinanderfolgenden Zahlen zu ergänzen[5]. Insgesamt haben wir bisher

$$2 \cdot \binom{45}{3} + 45 \cdot \binom{44}{3}$$

Möglichkeiten gezählt. Doch wie wir schon an einem Beispiel sehen konnten, haben wir auf diese Weise einiges doppelt gezählt: die bereits oben erwähnten Doppel-Drillinge. Ebenso haben wir auch (17, 18, 19, 33, 34, 35) doppelt gezählt. Einmal bei der Betrachtung des „kleineren Drillings“ (17, 18, 19) und ein weiteres Mal bei der Betrachtung des „größeren Drillings“ (33, 34, 35). Auf diese Weise wurde jeder Doppel-Drilling doppelt gezählt. Wir müssen also die Anzahl aller Doppel-Drillinge ermitteln und das Ergebnis von unserer oben berechneten Gesamtzahl aller Möglichkeiten abziehen.

Doppel-Drillinge zählen

Wir gehen systematisch vor und betrachten erneut alle Drillinge, also

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \ldots, (47, 48, 49)\,.$$

Zu jedem Drilling zählen wir nun, auf wie viele Möglichkeiten man ihn durch einen zweiten, größeren Drilling zu einem Doppeldrilling ergänzen kann. Wir können (1, 2, 3) ergänzen mit

$$(5, 6, 7), (6, 7, 8), \ldots, (47, 48, 49)\,.$$

Das liefert 43 Doppel-Drillinge. Nun können wir (2, 3, 4) offenbar auf 42 Weisen ergänzen. Dies führen wir so fort und erhalten schlussendlich für (43, 44, 45) nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{43} i = \frac{43 \cdot 44}{2} = 946$$

Möglichkeiten.

Nun können wir die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von genau drei aufeinanderfolgenden Zahlen bei einer Ziehung berechnen. Es gibt

$$2 \cdot \binom{45}{3} + 45 \cdot \binom{44}{3} - 946 = 623.414$$

verschiedene Ziehungen mit genau drei aufeinanderfolgenden Zahlen.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis

$$P(X = 3) = \frac{623.414}{\binom{49}{6}} \approx 4{,}5\ \%.$$

Mindestens drei aufeinanderfolgende Zahlen

Zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von *mindestens* drei aufeinanderfolgenden Zahlen addieren wir abschließend die Wahrscheinlichkeiten für genau drei, genau vier, genau fünf und genau sechs aufeinanderfolgende Zahlen. Wir erhalten

$$P(X \geq 3) = \sum_{i=3}^{6} P(X = i) \approx 4{,}8\ \%.$$

Eine Ziehung mit mindestens drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist also – wie nicht anders zu erwarten – wesentlich unwahrscheinlicher als eine Ziehung mit mindestens einem Paar benachbarter Zahlen, aber der Wert 4,8 % ist ebenfalls erstaunlich.

4 Abschlussbemerkungen

Wir haben im vorliegenden Artikel verschiedene Zugänge vorgestellt, um die Wahrscheinlichkeiten für Zwillinge und andere Mehrlinge im Lotto zu bestimmen. Wie unsere Ausführungen aufzeigen, gibt es nicht die eine Methode, mit der sich alle Fragestellungen beantworten lassen. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die in Abschnitt 2.2 vorgestellte Methode eine Verallgemeinerung auf Drillinge etc. zulässt, die z. B. Horst Gundel (1987) aufzeigt. Da diese aber weder offensichtlich noch problemfrei ist, eignet sie sich nach Meinung der Autoren weniger gut, um Eingang in den Stochastik-Unterricht in der Schule zu finden. Glücklicherweise gibt es – wie in den Abschnitten 3.2 bis 3.6 beschrieben – praktikable Alternativen zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten anderer Mehrlinge. Die in den Abschnitten 3.2 bis 3.4 vorgestellte Lösung zur Bestimmung von $P(X = i)$ für $i = 4, 5, 6$ lässt sich nicht problemlos auf die Problematik von genau zwei bzw. genau drei aufeinanderfolgenden Zahlen übertragen[6]. So erfordern die unterschiedlichen Fragestellungen immer wieder neue Ideen und Ansätze und das Thema Lotto erscheint uns unter anderem aus diesem Grund als ein sehr spannendes und ertragreiches Thema für den Stochastikunterricht bzw. in einer Stochastik-Grundvorlesung für Lehramtskandidaten. Ein weiterer Vorzug des Themas besteht in der Möglichkeit, die Ergebnisse im Modell mit den in der Realität tatsächlich auftretenden Werten vergleichen zu können. Im Internet finden sich viele statistische Aufzeichnungen zum Thema Lotto. So wurden z. B. auf der Seite

http://www.dielottozahlende.net/lotto/6aus49/statistiken.html

alle Lotto-Ziehungen von 1955 (Mittwochs- und Samstags-Ziehung) bis heute (das sind knapp 5000 Ziehungen) statistisch aufbereitet. Es zeigt sich: in rund 50,9 % aller Ziehungen kamen ein oder mehrere Zwillinge vor. In 4,7 % aller Ziehungen tauchte ein Drilling auf. Damit können wir Schülern und Studierenden ein schönes Beispiel für das Gesetz der großen Zahlen aufzeigen.

Abschließend möchten wir darauf hinweisen, dass nicht nur die folgenden Mengen die gleiche Anzahl an Elementen besitzen:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Alle Ziehungen}\\ \text{„6 aus 49" \textit{ohne}}\\ \textit{benachbarte}\\ \text{Zahlen.}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\textit{Alle}\text{ Ziehungen}\\ \text{„6 aus 44".}\end{array}\right\}$$

Vielmehr lässt sich diese Eigenschaft auf alle Lottosysteme verallgemeinern. Es gilt stets: Die beiden Mengen

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Alle Ziehungen}\\ \text{„}k\text{ aus }n\text{" \textit{ohne}}\\ \textit{benachbarte}\\ \text{Zahlen.}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\textit{Alle}\text{ Ziehungen}\\ \text{„}k\text{ aus }(n-k+1)\text{".}\end{array}\right\}$$

besitzen jeweils dieselbe Anzahl an Elementen. Dies gilt natürlich nur, falls $2k \leq n + 1$ ist, d. h. falls es überhaupt Ziehungen „k aus n" ohne benachbarte Zahlen geben kann.

Insofern könnte im Unterricht auch folgendes Vorgehen interessant sein: Zunächst werden kleinere Beispiele in einer Art „Mini-Lotto" untersucht. Die dabei entdeckten Regelmäßigkeiten lassen sich dann unter Umständen leichter auf das reguläre Lottospiel übertragen, so dass auch schwächere Schüler einen Zugang zur Problematik finden können.

Anmerkungen

1 Die weibliche Form sei impliziert.

2 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

3 Es sei hier erwähnt, dass das Ergebnis uns auch in der Rückschau dieses Mal keinen eleganten Weg aufzeigen wird. Der Hauptgrund hierfür ist die bereits erläuterte, fehlende Griffigkeit des Gegenereignisses.

4 Hierbei ist zugelassen, dass die beiden weiteren Zahlen einen Zwilling bilden, der aber nicht an den Vierling angrenzen darf (dies deckt sich mit unserer Definition der Zufallsvariablen X). Eine Betrachtung, die zwischen „genau einem Vierling und keinem Zwilling" und „genau einem Vierling und einem Zwilling" unterscheidet, findet sich z. B. bei Horst Gundel (1987).

5 Wobei an dieser Stelle „Doppel-Drillinge", d. h. Ziehungen mit zweimal drei aufeinanderfolgenden Zahlen, die aber insgesamt nicht aufeinanderfolgen, inkludiert seien.

6 Auch hier sei noch einmal darauf hingewiesen, dass im Falle von Zwillingen „Dreifachzwillinge", von denen je zwei keinen Vierling ergeben, inkludiert sind.

Literatur

Engel, A. (1973): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Gundel, H. (1987): Das Aufgabenfeld Lotto (Studienbrief). Tübingen: Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen.

Koth, M. (1997): Mathematikaufgaben zum Lotto 6 aus 45. In: *Didaktik Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 27,* S. 44–82.

Krengel, U. (2005): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Wiesbaden: Vieweg und Teubner Verlag.

Watson, R. (1997): Ist Problemlösen ein Lotterie-Spiel? In: *Stochastik in der Schule* 17 (2), S. 27–28.

Lottozahlen Statistiken: http://www.dielottozahlende.net/lotto/6aus49/statistiken.html. (Zugriff: 21.09.2011)

Anschrift der Verfasser

Peggy Daume und Michael Schmitz
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Universität Flensburg
Auf dem Campus 1
24943 Flensburg
peggy.daume@uni-flensburg.de
michael.schmitz@uni-flensburg.de