

Alles richtig und trotzdem falsch?

Anmerkungen zur Finanzkrise und zur Finanzmathematik

HANS FÖLLMER, BERLIN

Die globale Finanzkrise mit ihren dramatischen Auswirkungen auf die Realwirtschaft wird unter vielen Aspekten diskutiert: Politik des billigen Geldes, naiver Glaube an die Effizienz der Finanzmärkte und entsprechend exzessive Deregulierung, übertriebene Renditeziele und entsprechend aggressive Strategien, Verbriefung von Kreditrisiken und entsprechend exotische Derivate, falsche und insbesondere zu kurzfristige Anreizsysteme, prozyklische Effekte der Bewertungsmethoden bis hin zu Stichworten wie Gier (exorbitante Boni, ...), Lug und Trug (Madoff, ...).

Wie ist vor diesem düsteren Hintergrund die Rolle der Mathematiker zu sehen, die sich entweder als „Quants“ in der Finanzindustrie oder auch auf der akademischen Ebene mit den Risiken der Finanzmärkte beschäftigen? Tragen auch sie Verantwortung für das Desaster der Finanzkrise? Waren die in der Praxis benutzten mathematischen Modelle zwar „high tech“, aber trotzdem naiv? Waren die theoretischen Resultate zwar mathematisch richtig, aber als Signale an die Praxis falsch?

„Don't Blame The Quants“?

Angesichts der Krise betonen manche Finanzmathematiker, so zum Beispiel Steven Shreve (Carnegie Mellon) unter der Überschrift „Don't Blame The Quants“, dass bei den fatalen strategischen Weichenstellungen in der Finanzindustrie, die zum Ausbruch der Krise führten, die „Quants“ in der Regel nicht selber an den Hebeln saßen. In Deutschland zum Beispiel waren es zunächst die Landesbanken, die sich in „strukturierten Wertpapieren“ zur Verbriefung von schlechten („Subprime“-) Kreditrisiken¹ auf dem amerikanischen Häusermarkt besonders stark engagiert hatten und entsprechend hart getroffen wurden. Hier sind zwar Mathematiker auf die oberste Entscheidungsebene vorgerückt, dies aber erst *nach* dem Ausbrechen der Krise, als es darum ging, mit dem Aufräumen der Scherbenhaufen zu beginnen. Auch ist es richtig, dass es schon vor Jahren warnende Stimmen von Mathematikern zur allzu optimistischen Einschätzung der Risiken im Subprime-Bereich gab; sie fanden aber wenig Gehör, weil die Profite aus der Verpackung und Weiterreichung schlechter Kreditrisiken zunächst nur so sprudelten. Im Falle Madoff waren es „Quants“, die der amerikanischen Börsenaufsicht SEC schon vor Jahren Hinweise gaben, dass

etwas nicht stimmen konnte; sie wurden aber nicht beachtet. Man könnte auch Beispiele anführen wie *Renaissance Technologies* oder die AHL-Fonds der *Man Group* (Sponsoren des Oxford-Man Institute of Quantitative Finance), wo „Quants“ in der Tat am Steuer saßen und auch in der Krise sehr erfolgreich waren. Angesichts der gesellschaftlichen Kosten der Krise klingt das vielleicht zynisch. Es ist aber ein Hinweis, dass mit Verstand und Augenmaß eingesetzte mathematische Methoden auch in der Krise funktionieren können.

War also in den Turbulenzen der Finanzmärkte die Finanzmathematik, wie man hoffen sollte, eine Gegenkraft der „Aufklärung“, die für Klarheit, Transparenz und Stabilität sorgt? Das war und ist sie sicher auch. Aber dies ist nicht der einzige Aspekt, unter dem man ihre Rolle sehen kann.

Scheinwerfer auf die Realität

Was in führenden Zeitschriften wie *Mathematical Finance* oder *Finance and Stochastics* veröffentlicht wird, ist natürlich nach mathematischen Kriterien (fast) immer richtig. Als ein übergreifendes Forschungsfeld mit methodischen Schwerpunkten in Martingalthorie², stochastischer Analysis, partiellen Differentialgleichungen und Optimierungstheorie hat die Finanzmathematik viele heuristische Argumente aus der Finanzwissenschaft mathematisch präzisiert, ihre Voraussetzungen und ihre Reichweite geklärt und sie anhand einer Vielfalt konkreter Modelle illustriert. Das hat zu vielen neuen mathematischen Einsichten geführt, die oft auch dann von Interesse sind, wenn man die finanzielle Interpretation ganz weglässt. Was passiert aber, wenn man diese theoretischen Resultate auf die Realität der Finanzmärkte anwendet?

Hier ist das Bild des „Scheinwerfers auf die Realität“ nützlich (so lautet die Überschrift eines von Jochen Brüning ins Deutsche übersetzten Artikels von Alain Connes mit dem Untertitel: „Wie die Mathematik Wirklichkeiten findet und erschließt“ in der FAZ vom 7.03.2000). Es illustriert nämlich ein ernstes Problem (auf das aber Connes nicht eingeht): richtet man einen starken Scheinwerfer auf eine reale Situation, dann wird zwar ein Ausschnitt sehr klar erhellt, aber anderes wird ausgeblendet und verschwindet im Dunklen, obwohl es vielleicht wichtig ist.

Ein typisches Diffusionsmodell³ der Finanzmathematik für die Preisentwicklung einer Aktie beleuchtet sozusagen die mesoskopische Ebene. Der makroökonomische Kontext wird ausgeblendet. Auch das zugrundeliegende mikroökonomische Zusammenspiel von Erwartungen und Präferenzen der an dieser Aktie interessierten Marktteilnehmer gerät so nicht in den Blick. Das gilt erst recht für die interaktiven Ansteckungseffekte, die in Analogie zu kritischen Phänomenen der Statistischen Mechanik zu spekulativen Blasen und deren Platzen führen können.

Für bestimmte Zwecke des „Financial Engineering“ ist ein solcher Scheinwerfer sehr gut geeignet, zum Beispiel zum Zweck der Bewertung und Absicherung eines Derivats⁴, das sich auf die modellierte Aktie bezieht. Selbst auf dieser mesoskopischen Ebene werden aber viele Aspekte zunächst ausgeblendet, zum Beispiel die Rückwirkung von Handelsstrategien auf den Preisprozess beim Aufbau und beim Auflösen großer Positionen. Solche Defizite werden natürlich auch von den Mathematikern in der Regel sehr klar gesehen, und sie richten immer wieder neue Scheinwerfer auf bisher ausgeblendete Aspekte (zum Beispiel auf den soeben genannten). Es handelt sich aber meistens nur um Partialanalysen. Von einem mathematischen Verständnis des großen Ganzen ist man weit entfernt. Zwar gibt es auch für die Finanzmärkte mathematische Modelle der allgemeinen ökonomischen Gleichgewichtstheorie. Aber auch hier bleiben viele Phänomene ausgeblendet, und zum Verständnis der Finanzkrise tragen sie nur wenig bei.

„Effizienz“ der Finanzmärkte?

Steht hinter der Finanzmathematik, wie manche meinen, ein naiver Glaube an die Effizienz der Finanzmärkte? Das Gegenteil ist der Fall: die Finanzmathematik hat zunächst zur Präzisierung der grundlegenden Begriffe beigetragen und dann den Rahmen sehr viel weiter gesteckt. Die folgenden Argumente gehören zum Kernbestand der Finanzmathematik. Sie illustrieren, dass Finanzmathematik in weiten Teilen mehr mit Grundlagenforschung als mit „Financial Engineering“ im Kontext eines speziellen Modells zu tun hat.

Die Hypothese von der Effizienz der Finanzmärkte wird in der Regel so formuliert, dass der Markt alle relevanten Informationen zu jedem Zeitpunkt schon „eingepreist“ hat. In dieser starken Form bedeutet das insbesondere, dass der gegenwärtige Preis einer Aktie die beste Prognose für die zukünftigen Preise liefert (nach Abdiskontierung). Mathematisch übersetzt sich das so, dass die (diskontierte) Preisbewegung, aufgefasst als stochastischer Prozess, die Martin-

galeigenschaft² hat. Daraus folgt aber, dass es keine Strategien mit positiver Gewinnerwartung (oberhalb der Rendite eines Sparbuchs) geben kann. Damit wird klar, wie restriktiv diese Hypothese ist.

Realistischer und viel flexibler ist die Annahme der Arbitragefreiheit. Sie besagt nur, dass die Finanzmärkte keinen „free lunch“ zulassen, also keine Gewinnstrategien, die nicht zugleich das Risiko eines Verlustes mit sich bringen. Diese Arbitragefreiheit liefert den allgemeinen konzeptionellen Rahmen für die Finanzmathematik. Nicht nur einfache Diffusionsprozesse³ gehören dazu, sondern auch sehr viel komplexere Modelle, zum Beispiel Lévy-Prozesse, Prozesse mit Langzeitgedächtnis und insbesondere die von Benoit Mandelbrot propagierte fraktionale Brownsche Bewegung (jedenfalls dann, wenn man Transaktionskosten berücksichtigt). Die Grundannahme der Arbitragefreiheit lässt also einen sehr großen Spielraum für die Wahl eines speziellen Modells. Sie liefert zugleich die konzeptionelle Basis für das klassische Kerngeschäft der Finanzmathematik, nämlich die arbitragefreie Bewertung und die dynamische Absicherung von finanziellen Positionen.

Auch die Finanzkrise gibt keinen Anlass, von der Hypothese der Arbitragefreiheit abzuweichen. Andererseits ergibt sich aus der Arbitragefreiheit allein noch nicht viel Einsicht in viele der konkreteren Fragen, die sich angesichts der Finanzkrise stellen.

Jenseits von „Black-Scholes“

Im „Black-Scholes-Modell“ wird die Preisbewegung einer Aktie durch eine geometrische Brownsche Bewegung³ beschrieben. Wie auch andere einfache Diffusionsprozesse gehört sie zur Klasse der sogenannten „vollständigen“ Modelle. In einem solchen Modell für den Preisprozess einer Aktie ist es möglich, eine Handelsstrategie anzugeben, mit der sich der Verkäufer eines Derivats dieser Aktie „perfekt absichern“ kann. Das bedeutet, dass er mit dieser Handelsstrategie zu jedem Zeitpunkt in der Lage ist, den Käufer des Derivats auszuzahlen. Das dabei benötigte Anfangskapital bestimmt eindeutig den arbitragefreien Preis des Derivates. Dies ist der mathematische Kern der „Black-Scholes-Formel“ zur Bewertung von Derivaten. Bis in die 90er Jahre kam das in der Finanzindustrie weitgehend als Botschaft an, dass man auf der Ebene der Derivate mit genügend viel technischem know-how die Risiken voll beherrschen kann. In dieser Form war das ein falsches Signal.

Das Black-Scholes-Modell wird zu Recht kritisiert (besonders scharf von Mandelbrot), weil es für die logarithmischen Preisinkremente eine Gauß-Vertei-

lung unterstellt und damit die Wahrscheinlichkeit von drastischen Ausschlägen erfahrungsgemäß zu niedrig ansetzt. Auf der wissenschaftlichen Ebene rennt man aber mit dieser Kritik offene Türen ein. Denn als sich in den achtziger Jahren die Wahrscheinlichkeitstheoretiker dieser Thematik zuwandten, fiel ihnen natürlich sofort auf, wie begrenzt die Reichweite nicht nur des Black-Scholes-Modells, sondern auch der „Vollständigkeit“ ist. Die Realität ist immer „unvollständig“, weil es immer mehr Quellen der Ungewissheit als Instrumente zu ihrer Absicherung gibt, auch wenn man die wachsende Vielfalt von Finanzinstrumenten als eine Tendenz in Richtung auf „Vollständigkeit“ interpretieren kann. Bis auf die einfachen Diffusionsmodelle sind denn auch alle oben genannten Modellklassen unvollständig.

Das Paradigma der perfekten Absicherung von Derivaten bricht dann aber zusammen. Es war eines der ersten Projekte der damals entstehenden „stochastischen Finanzmathematik“, die Martingalstruktur von unvollständigen Modellen zu untersuchen und Strategien zur Risikoreduktion „jenseits von Black-Scholes“ zu entwickeln. Das Signal an die Praxis war klar: im unvollständigen Fall treten bei Derivaten immer intrinsische Risiken auf, die sich durch keine Absicherungsstrategie eliminieren lassen.

Zur Rolle der Derivate

Insgesamt kann man wohl sagen, dass der Einsatz von Derivaten auf den liquiden Aktienmärkten kein auslösender Brandherd der Finanzkrise war. In diesem Bereich hat das mathematische Instrumentarium bis zur Krise weitgehend funktioniert. Trotz der Krise bleibt es richtig, dass viele dieser Derivate ökonomisch sinnvoll sind, und zwar als Versicherungsinstrumente zur Absicherung von primären finanziellen Risiken. Dass sie de facto auch ganz anders benutzt werden, nämlich sozusagen „ohne Netz“ zur Konstruktion von aggressiven Wetten mit möglichst hoher Hebelwirkung, steht auf einem anderen Blatt. Man kann das als ein ethisches Problem für die „Quants“ oder auch als ein Problem der Regulierung der Finanzmärkte sehen; es ist aber kein Problem der unzureichenden mathematischen Analyse.

Auch die berühmten „Garantie-Zertifikate“ von Lehman Brothers waren an sich vernünftig konstruiert, abgesehen von den zu hohen Gewinnmargen der vermittelnden Banken und Sparkassen. Dass Lehman Brothers als Vertragspartner ausfallen würde und deshalb ein Totalverlust eintreten könnte, hatte praktisch niemand in der Rechnung. Auch in den mathematischen Bewertungsverfahren für die Zertifikate wur-

de dieses institutionelle Ausfallrisiko in der Regel ausgeblendet; mithilfe der liquiden Credit Default Swaps (CDS) hätte man es zwar durchaus bewerten und absichern können, dies wäre allerdings auf Kosten der den Anlegern in Aussicht gestellten Rendite gegangen. Der Ausfall selbst hatte natürlich mehr mit politischen Weichenstellungen in den USA (und die bitteren Konsequenzen für viele Privatanleger in Deutschland mehr mit der Architektur der deutschen Einlagensicherung) als mit Mathematik zu tun.

Ganz anders war die Lage im Bereich der „Verbriefung“ von Kreditrisiken auf dem amerikanischen Häusermarkt, und dies war der Brandherd, der die Krise auslöste. Im Prinzip ist auch hier die Idee, Risiken durch den Einsatz von Derivaten breiter zu streuen, ökonomisch sinnvoll. Insofern sich diese Risiken auf den Immobilienmarkt beziehen, ist aber die Situation konzeptionell eine ganz andere als auf den Aktienmärkten. Denn bei Immobilien handelt es sich gerade nicht um liquide Werte, mit deren Hilfe man dynamische Absicherungsstrategien konstruieren könnte. Damit fehlt der entscheidende Ansatzpunkt für die Argumentationslinie, die im Bereich der Aktienderivate zur Black-Scholes-Formel und den Varianten „jenseits von Black-Scholes“ führt. Man steht stattdessen vor einem „pre Black-Scholes“-Problem, das konzeptionell mehr mit „Versicherungsmathematik der 2. Art“ (klassische Sachversicherung) als mit „Versicherungsmathematik der 3. Art“ (dynamische Absicherung) zu tun hat.

Bei der Modellierung von Kreditderivaten geht es um ein sehr komplexes Zusammenspiel von vielen bedingten Ausfallswahrscheinlichkeiten. Auf der wissenschaftlichen Ebene gibt es hierzu eine umfangreiche Literatur, in der insbesondere die Martingaltheorie von Punktprozessen zur Geltung kommt. Hier wird sehr deutlich, wie schwierig es ist, die vielen interaktiven Effekte nicht nur formal in die Modellierung einzubeziehen, sondern sie dann auch versicherungsmathematisch zu quantifizieren.

Im Prinzip hat man es mit hochdimensionalen Schätzproblemen zu tun. Im Bereich der „Subprime“-Kredite war es aber so, dass man praktisch keine vernünftige Datenbasis hatte. Es war ja in den USA politisch gewollt, durch freigiebig verteilte Kredite und in der Hoffnung auf immer weiter steigende Häuserpreise neue Käuferschichten zu gewinnen. Deren Kreditwürdigkeit hatte aber mit den empirischen Ausfallwahrscheinlichkeiten der Vergangenheit sehr wenig zu tun.

Trotz dieser methodischen Probleme wurden die Einzelkredite von den beteiligten Banken und Versicherungen massenhaft in *Collateralized Debt Obligations* (CDO) und in darauf basierende Derivate (CDO², ...)

verpackt. Mit ad hoc-Methoden wurden diese „strukturierten“, aber immer weniger transparenten Produkte viel zu optimistisch bewertet. Die Rating-Agenturen verteilten aufgrund noch naiverer Methoden ihre Gütesiegel, und dann wurden sie „over the counter“ (OTC)⁵ weitergereicht. Bei der Verpackung waren natürlich viele „Quants“ der Finanz- und Versicherungswirtschaft beteiligt. Andererseits gab es seitens der Wissenschaft und auch von manchen „Quants“ schon sehr früh Warnungen vor abenteuerlichen Vereinfachungen der theoretischen Modelle.

Die erwarteten Renditen waren hoch, gleichzeitig wurden die Risiken dramatisch unterschätzt. Entsprechend euphorisch war der Run auf die „strukturierten Wertpapiere“; dabei wurden Preise gezahlt, denen gegenüber sogar die optimistischen Bewertungen noch sehr konservativ ausfielen. Das Ganze spielte sich auf einem völlig intransparenten OTC-Markt mit sehr asymmetrischer Information ab, der sich (aufgrund politischer Vorgaben) ohne jede Regulierung entwickelte. Auch die (politisch kontrollierten) deutschen Landesbanken waren dabei, weit jenseits ihres eigentlichen Kerngeschäfts und mit den bekannten fatalen Folgen. *Dass* der überhitzte Markt für strukturierte Produkte irgendwann zusammenbrechen würde, wurde übrigens von vielen erwartet. Der Zeitpunkt war natürlich unklar, und die hohen Profite sorgten dafür, dass viele der Akteure möglichst lange im Spiel bleiben wollten. Vor allem aber wurde die Dynamik der ausgelösten Kettenreaktionen völlig unterschätzt.

Im Rückblick ist natürlich klar, dass die kritischen Stimmen aus der Finanzmathematik viel zu leise waren. Aber in der wissenschaftlichen Öffentlichkeit und sogar auf der Ebene der Aufsichtsbehörden war ja zunächst nicht bekannt, in welchen Größenordnungen und wie stark vernetzt sich die Finanzindustrie hier exponiert hatte, oft außerhalb der Bilanzen. Die Tatsache, dass Derivate den Risikotransfer erleichtern, war aus Sicht der allgemeinen ökonomischen Gleichgewichtstheorie immer nur positiv gewertet worden. Man hat nicht kommen sehen, dass gerade die Ankurbelung dieses Transfers durch den massiven Einsatz von Derivaten die globale Vernetzung der Finanzmärkte so verstärken würde, dass es nach Ausbruch der Krise nicht mehr möglich war, den Brand auf seinen ursprünglichen Herd zu begrenzen. Dieses durch Vernetzung entstehende systemische Risiko war kein Thema der Finanzmathematik. Erst ex post werden jetzt auch hier die ersten Scheinwerfer installiert.

Die Finanzmathematik hat ja in ihren Kernbereichen gerade *nicht* den Anspruch erhoben, Prognosen zu liefern. Wenn man sie trotzdem daran misst,

was sie ex ante zur Analyse der systemischen Risiken und zur Antizipation der Finanzkrise beigetragen hat, dann hat die Finanzmathematik in der Tat „systemisch versagt“. Dieses Defizit ist allerdings nicht beschränkt auf die Finanzmathematik; vgl. zum Beispiel das Arbeitspapier „The Financial Crisis and the Systemic Failure of the Economic Profession“ von David Colander et al. (entstanden auf einer Dahlem-Konferenz im Dezember 2008).

Illusion der Kontrolle

Eine sehr präzise Beschreibung des Zusammenspiels der Faktoren, die zum Ausbrechen und zur globalen Ausweitung der Finanzkrise führten, findet man in der Studie „Systemic Risk in the Financial Sector: An Analysis of the Subprime-Mortgage Financial Crisis“ von Martin Hellwig (MPI zur Erforschung von Gemeinschaftsgütern, Bonn). Hellwig ist Ökonom, und bei ihm geht es vor allem um strukturelle Mängel in der Architektur der internationalen Finanzmärkte. In Abschnitt 4.5 thematisiert er aber auch die Rolle der Mathematik, und zwar unter der Überschrift „Excessive Confidence in Quantitative Models as a Basis for Risk Management“.

Die Mathematiker selbst haben natürlich in der Regel sehr genau im Blick, unter welchen Voraussetzungen ihre Aussagen gelten. Die „wenn ... dann“-Struktur ihrer Argumente geht aber entlang der Verwertungskette in der Praxis oft verloren. Allein die Tatsache, dass ein quantitatives Modell benutzt wird und die entsprechende Software installiert ist, erzeugt oft ein übertriebenes Gefühl der Sicherheit und Kontrolle. Das kann dann sehr leicht dazu führen, dass riskantere Positionen eingenommen werden bzw. die Kapitalreserve reduziert wird, weil man sich zu sehr auf die Quantifizierung des Risikos durch das eine benutzte Modell verlässt anstatt das Modell zu variieren und genügend große Puffer für das Modellrisiko einzubauen. Dieser Mechanismus hat sicher an vielen Stellen gewirkt. Auch Lord Turner, Chairman der britischen Financial Services Authority (FSA), geht in seinem Bericht zur Finanzkrise (*The Turner Review: A regulatory response to the global banking crisis*, März 2009) darauf ein, und zwar in Abschnitt 1.4 unter der Überschrift „Misplaced reliance on sophisticated maths“ (in einem Interview mit der *Financial Times* stellt er klar, dass damit nicht etwa gemeint ist, mathematische Methoden würden *per se* eine negative Rolle auf den Finanzmärkten spielen).

Auch hier kann man fragen, ob die Mathematiker nicht sehr viel stärker hätten warnen müssen. Es ist aber so, dass es auf der wissenschaftlichen Ebene

schon seit langem starke Signale in dieser Richtung gibt, und zwar unter den Stichworten „model ambiguity“ und Robustheit.

Exkurs: Risiko, Modellrisiko und Robustheit

Wie wird das „Risiko“ einer finanziellen Position finanzmathematisch quantifiziert? Aus Sicht einer Aufsichtsbehörde geht es darum, die minimale Kapitalreserve festzulegen, die nötig ist, damit die Position akzeptabel wird. Je größer das Risiko, desto größer sollte die Kapitalreserve sein. Es liegt also nahe, direkt diese Kapitalreserve als monetäres Risikomaß zu definieren.

„Value at Risk“ (VaR) betrachtet eine Position dann als akzeptabel, wenn die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes unterhalb einer vorgegebenen Schranke bleibt. Auf der wissenschaftlichen Ebene ist aber schon lange klar, dass dieser Ansatz erhebliche Defizite hat: er achtet nur darauf, ob die Schranke überschritten wird und berücksichtigt nicht, wie groß der Verlust dann ist, er penalisiert womöglich eine an sich wünschenswerte Diversifizierung, und vor allem setzt er voraus, dass man aufgrund historischer Daten die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Griff hat, was de facto meistens nicht der Fall ist, schon gar nicht im Vorfeld einer Krise. Um es mit Simon Johnson (MIT) zu sagen: „VaR misses everything that matters when it matters“. Auch der *Turner Review* geht ausführlich auf die Defizite von VaR ein. Von der wissenschaftlichen Seite wurden sie aber schon viel früher klar benannt; vgl. zum Beispiel „An Academic Response to Basel II“ von Jon Danielsson, Paul Embrechts et al. (LSE, 2001). Trotz dieser Kritik und trotz einer ausdrücklichen Warnung der *Banque de France* wird dieser Ansatz in der Praxis immer noch überwiegend benutzt, und zwar vor allem deshalb, weil er vom *Basel Committee for Banking Regulation* als internationaler Standard (Basel II) festgelegt wurde – einer der vielen Schwachpunkte auf der Ebene der internationalen Regulierung.

Der Beitrag der Finanzmathematik hat hier darin bestanden, schon in den 90er Jahren sozusagen axiomatisch zu klären, welche Konsistenzeigenschaften ein vernünftiges monetäres Risikomaß überhaupt haben sollte, und zwar ganz ohne a priori-Annahmen wahrscheinlichkeitstheoretischer Art. Das führte schließlich zum allgemeinen Begriff des konvexen Risikomaßes. Mit Methoden der konvexen Analysis kann man aber zeigen, dass ein konvexes Risikomaß notwendig die folgende Struktur hat. Man berechnet den erwarteten Verlust für verschiedene stochastische Modelle, also für verschiedene Wahrscheinlichkeits-

verteilungen auf der Menge der möglichen Szenarien. Diese Modelle werden unterschiedlich ernst genommen, also unterschiedlich penalisiert. Dann nimmt man innerhalb der Klasse von penalisierten Modellen den für die gegebene Position ungünstigsten Fall.

Stochastische Modelle kommen also als Folge der Konsistenzannahmen unweigerlich ins Spiel, obwohl man zunächst gar nicht von Wahrscheinlichkeiten gesprochen hat. Die Modelle werden aber nicht als definitive Abbildungen der Realität aufgefasst und als solche fixiert, sondern sie dienen als Stresstests. Man bindet sich nicht an ein festes Modell, sondern geht für jede Position auf die sichere Seite, indem man sich auf das entsprechende „worst case“-Modell konzentriert. Diese „Robustifizierung“ bezieht also das Problem der Modellungewisheit („Modellrisiko“, „Risiko des Risikos“, ...) explizit in das Verfahren ein.

Hier ergibt sich eine sehr aktuelle Querverbindung zur ökonomischen Theorie des „rationalen“ Verhaltens bei Ungewissheit. John von Neumann, Oskar Morgenstern und Leonard Savage hatten mit ihrer Axiomatik für konsistente Präferenzen das klassische Paradigma des erwarteten Nutzens mathematisch begründet. Viele Experimente zeigen aber, dass das faktische Verhalten der Akteure immer wieder gegen diese klassische Normierung von „Rationalität“ verstößt. Es gibt dafür auch gute Gründe, die etwas mit fehlender Information über Wahrscheinlichkeiten zu tun haben, von den Ökonomen oft als Modellungewisheit („model ambiguity“) oder auch als „Knightian uncertainty“ bezeichnet (eine Reverenz an Frank Knights Dissertation *Risk, Uncertainty, and Profit*, Yale, 1921). Die dadurch in den letzten Jahren ausgelösten theoretischen Entwicklungen in der Mikroökonomie laufen nun aber, mathematisch gesprochen, auf eine Robustifizierung hinaus, bei der das implizite Wahrscheinlichkeitsmaß im erwarteten Nutzen durch ein konvexes Risikomaß ersetzt wird, also durch die simultane Verwendung einer ganzen Klasse von möglichen stochastischen Modellen mit unterschiedlicher Penalisierung.

Das Signal an die Praxis des Risikomanagements ist jedenfalls klar: sich nicht binden an ein einziges Modell, flexibel bleiben, die Modelle je nach Fragestellung variieren, immer mit Blick auf den „worst case“.

Warum überhaupt Wahrscheinlichkeiten?

Unter den kritischen Reaktionen auf die Rolle der Mathematik in der Finanzkrise gibt es auch solche, die den Einsatz von wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden sehr grundsätzlich in Frage stellen.

Ein Beispiel ist „Der schwarze Schwan“ von Nassim Taleb, ein weiteres der soeben veröffentlichte Vortrag „Fortuna und Kalkül“, den Hans Magnus Enzensberger im März 2008 auf dem Festival della Matematica in Rom gehalten hat.

Es ist klar, dass auf den Finanzmärkten die Unge-
wissheit über zukünftige Entwicklungen eine zentra-
le Rolle spielt und in vielfältiger Weise „gehandelt“
wird. Weit weniger klar ist, ob und wie man die Viel-
falt der möglichen Szenarien mit Wahrscheinlichkei-
ten belegen kann. Der Übergang von historischen
Daten und den daraus gewonnenen empirischen Ver-
teilungen zu einem wahrscheinlichkeitstheoretischen
Modell für die zukünftige Entwicklung setzt implizit
immer ein gewisses Maß an Stationarität voraus, eine
Annahme, die gerade auf den Finanzmärkten äußerst
heikel ist und bei jeder Krise, sozusagen per Definiti-
on, über den Haufen geworfen wird.

Trotzdem kommt man um Konzepte und Methoden
der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht herum. Das il-
lustriert bereits unser Exkurs zum Problem der Ri-
sikoquantifizierung und zur Struktur konsistenter
Präferenzen. Hier ist ein weiteres Argument. An den
Finanzmärkten werden, mit oder ohne Modelle, Er-
wartungen über die zukünftige Entwicklung gehan-
delt. Das spielt sich in sehr interaktiver Weise in
den Köpfen ab und auch (um eine von Enzensberger
zitierte Formulierung von Yuri Manin zu benutzen)
im „kollektiven Unbewussten“ der Computerpro-
gramme und der in ihnen benutzten Modelle und
Algorithmen, die in der Finanzindustrie eingesetzt
werden. Dies Zusammenspiel schlägt sich nieder in
der Dynamik eines sehr komplexen Preissystems.
Hier erzwingt aber die Arbitragefreiheit eine gewisse
Konsistenz und damit implizit wahrscheinlichkeits-
theoretische Strukturen.

Viele finanzmathematische Untersuchungen beschäf-
tigen sich deshalb auch direkt mit dem inversen Pro-
blem, aus der Beobachtung der Marktpreise von In-
strumenten, die sich auf die zukünftige Entwicklung
beziehen, die impliziten Wahrscheinlichkeiten zu
rekonstruieren. Ein einfaches Beispiel ist die proba-
bilistische Interpretation der Kreditspannen („credit
spreads“) zwischen verschiedenen Unternehmensan-
leihen durch Ausfallwahrscheinlichkeiten, ein ande-
res ist die Rekonstruktion von impliziten Randvertei-
lungen aus den Preisen von Call-Optionen mit un-
terschiedlichen Laufzeiten und Ausübungspreisen.

Die mathematische Stochastik liefert zu alldem die
Konzepte und die Methoden. Vor allem aber hat sie in
großem Stile die Sprache der Finanzmärkte geprägt,
und zwar sowohl in der Praxis wie auf der akademi-

schen Ebene der Departments of Finance and Eco-
nomics. Eine bessere Sprache hat man bisher nicht
gefunden.

Markets – Maths = Mayhem

Viele würden zur Zeit ja lieber ein „+“ einsetzen. In
einem Editorial zum *Turner Review* vom 21. März
2009 insistiert die *Financial Times* auf dem „-“ und
ähnlich argumentiert eine Gruppe von führenden bri-
tischen Stochastikern in einem Brief an Lord Turner
vom 4. Juni 2009, darunter Mark Davis (Imperial
College), Terry Lyons (Oxford) und Chris Rogers
(Cambridge).

Wir brauchen transparentere Finanzprodukte und ro-
bustere Verfahren, stärkere Puffer für das Risiko, eine
intelligente Regulierung der Finanzmärkte auf inter-
nationaler Ebene und sinnvolle Anreizsysteme. All
das verlangt nach mehr Mathematik, nicht weniger.
Dies gilt insbesondere für das Projekt einer stärkeren
internationalen Regulierung. Denn es kann leicht
passieren (dafür gibt es historische Beispiele und
auch mathematische Fallstudien), dass eine zunächst
sehr plausibel erscheinende Regulierungsmaßnahme
die Tür für destabilisierende Arbitragestrategien öff-
net; hier braucht man also sorgfältige und auch durch
mathematische Modelle unterstützte Analysen.

Es gibt für die Finanzmärkte nicht das eine „richtige“
mathematische Modell. Jedes Modell ist in irgendei-
nem Sinne „naiv“ und kann gefährlich werden, wenn
es mit der Realität verwechselt wird und dadurch
Scheuklappen erzeugt. Trotzdem sind mathemati-
sche Modelle unentbehrlich – als Scheinwerfer auf
unterschiedliche Phänomene, als Stresstests für heu-
ristische Argumente und Strategien, also als Orientie-
rungshilfen zum Verständnis komplexer Zusammen-
hänge und zur Vorbereitung vernünftiger Entschei-
dungen. Es kommt aber darauf an, mathematische
Modelle mit der nötigen Flexibilität und mit interdis-
ziplinär geschultem Augenmaß zu benutzen.

Nicht nur im Management der Finanzindustrie, son-
dern auch bei den „Quants“ und auch auf der wis-
senschaftlichen Ebene brauchen wir eine stärkere
Sensibilität für das ständig präsente Modellrisiko.
Auch der *Turner Review* unterstreicht das Problem
der „Knightian uncertainty“. Unser obiger Exkurs il-
lustriert aber (und hier setzen wir die Akzente anders
als im *Turner Review*), dass „Knightian uncertainty“
kein Grund ist, als Mathematiker das Handtuch zu
werfen. Im Gegenteil: das Programm der Robustifi-
zierung ist eine der großen Herausforderungen auch
aus mathematischer Sicht. Es ist natürlich nicht die
einzige: viele weitere Scheinwerfer werden benötigt,

insbesondere auf das systemische Risiko und auf seine Quellen.

Diese Herausforderungen verlangen nach interdisziplinärer Anstrengung. Aber ohne Mathematik wird es nicht gehen, und auch die Mathematiker müssen sich ihnen stellen. Eine Alternative gibt es nicht. Denn wie im Kleistschen Marionettentheater führt auch in der komplexen Welt der Finanzmärkte kein Weg zurück zur Unschuld des rein Intuitiven.

Bei diesem Aufsatz handelt es sich um eine von Dr. Elke Warmuth überarbeitete und um erläuternde Anmerkungen ergänzte Version eines gleichnamigen Aufsatzes in MDMV 17 (2009), 148–154. Wir danken der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für die Genehmigung zum Abdruck.

Anmerkungen

- 1 **Subprime** mortgages sind zweitklassige Immobilienfinanzierungen, deren Zweitklassigkeit auf der geringen Kreditwürdigkeit der Kreditnehmer beruht.
- 2 Das einfachste Beispiel eines **Martingals** in diskreter Zeit ist eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, für die gilt

$$E(X_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n.$$

Ein prominentes Beispiel dafür ist die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der summarischen Gewinne eines Spielers in aufeinanderfolgenden voneinander unabhängigen fairen Spielen.

- 3 Ein **stochastischer Prozess** ist eine Schar $(X_t)_{t \in T}$ von Zufallsvariablen. Die Variable t steht oft für die Zeit. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $(X_t(\omega))_{t \in T}$ eine sogenannte Trajektorie, d. h. einen möglicher Verlauf des zufälligen Geschehens in der Zeit.

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ hat die Markov-Eigenschaft, wenn zu jedem Zeitpunkt t die Wahrscheinlichkeitsverteilung für seine weitere Entwicklung nur von seinem Wert X_t zur Zeit t abhängt, nicht aber davon, wie er in diesen Zustand gelangt ist.

Unter **Diffusionsprozessen** versteht man zufällige Prozesse mit stetigen Trajektorien, die durch Drift- und Diffusionsfunktionen beschrieben werden.

Der Prototyp eines Diffusionsprozesses ist die Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$, auch Wiener-Prozess genannt, dessen Zuwächse in disjunkten Zeitintervallen voneinander unabhängig und in jedem Intervall $[s, s + t]$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t sind. Ein weiteres Beispiel ist die geometrische Brownsche Bewegung $X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma W_t)$, auch **Black-Scholes-Modell** genannt.

Bei einem allgemeinen Diffusionsprozess verhalten sich die Zuwächse $X_{t+s} - X_s$ für kurze Zeitabstände t bei gegebenem $X(s) = x$ annähernd wie eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $a(x) \cdot t$ und Varianz $b(x) \cdot t$ unabhängig vom bisherigen Verlauf des Prozesses („Markov-Eigenschaft“). Eine exakte Beschreibung kann u. a. mit Hilfe sogenannter stochastischer Differentialgleichungen erfolgen. Die Funktionen a bzw. b heißen Drift bzw. Diffusion, letztere in der Finanzmathematik auch Volatilität.

- 4 Ein **Derivat** ist ein Finanzprodukt, das an ein anderes Finanzprodukt (z. B. eine Aktie als Basis) gebunden ist und dessen Wert vom Wert dieses Basisprodukts abhängt. Ein Beispiel für ein Derivat ist eine Call-Option auf eine Aktie. Der Käufer einer solchen Option erwirbt das Recht, aber nicht die Pflicht, den Basiswert (die Aktie) in einer bestimmten Menge (bis) zu einem bestimmten Zeitpunkt zu einem festgelegten Preis zu kaufen.
- 5 **OTC** bezeichnet in der Finanzwirtschaft den außerbörslichen Handel mit Finanzprodukten.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Hans Föllmer
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
10099 Berlin

foellmer@mathematik.hu-berlin.de