Ziegen, Autos und Bayes — eine never-ending story

Stefan Götz, Wien

Zusammenfassung: *Das berühmte „Ziegenproblem“ („monty hall dilemma“) ist hinreichend diskutiert worden, es existieren zahlreiche Erklärungsmodelle für die Bewertung verschiedener Strategien. Weniger populär unter diesen ist ein sehr elementarer Bayesianischer Ansatz, siehe Vancsó und Wickmann (1999). Er soll referiert und noch ein wenig ausgebaut werden, u. a. durch eine Regeländerung des Spiels. Entscheidend dabei ist die (un)mögliche Interpretation der erhaltenen Ergebnisse.*

1 Worum geht es?

Trotz der Bekanntheit des so genannten „monty hall dilemmas“ („Ziegenproblem“ oder „Drei-Türen-Problem“) soll hier der Vollständigkeit halber eine kurze Beschreibung der zu diskutierenden Situation gegeben werden. In einer Fernsehshow wird einer Kandidatin von einem Spielleiter folgendes Spiel angeboten: Hinter drei verschlossenen Türen befinden sich ein Auto und zwei Ziegen. Die Kandidatin kann nun auf eine Tür tippen, von der sie vermutet, dass sich hinter ihr das Auto befindet. Nun öffnet der Spielleiter eine andere Tür, hinter der sich eine Ziege aufhält. (Er kennt die Verteilung der Ziegen und des Autos hinter den drei Türen.) Jetzt kommt der entscheidende Punkt. Der Spielleiter fragt die Kandidatin, ob sie bei ihrer ursprünglichen Wahl der Türe bleiben möchte oder auf die andere, noch geschlossene Türe wechseln möchte. An der Bewertung dieser Alternativen haben sich unzählige Diskussionen entzündet: Eine typische Fehlvorstellung ist die, dass es egal sei, ob man wechselt oder bleibt, denn die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter einer der beiden noch geschlossenen Türen befindet, sei 50% („günstige durch mögliche“ — Laplace-Wahrscheinlichkeit). Die Hartnäckigkeit, mit der diese Einschätzung vertreten wird, wird durch die zahlreichen unterschiedlichen (aber letztlich natürlich auf dasselbe hinauslaufenden) Erklärungsansätze „wie es wirklich ist“ belegt. Ein Blick ins Internet bestätigt diese Aussage eindrucksvoll. Kurz und bündig sei hier gesagt, dass die Strategie „Wechseln“ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ zum Auto führt, die Strategie „Bleiben“ also nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ das Auto bringt, welches dann als Gewinn mitgenommen werden kann. Eine Begründung dafür ist, dass nur bei ursprünglicher Wahl der Autotür (die Wahrscheinlichkeit dafür ist eben $\frac{1}{3}$) Bleiben den Gewinn des Autos nach sich zieht. Wird dagegen zuerst auf eine Ziegentür getippt (die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{2}{3}$), dann führt Wechseln mit Sicherheit zur Autotür.

2 Der Bayesianische Ansatz

In Vancsó und Wickmann (1999) finden wir die bemerkenswerte Feststellung, dass die obige Lösung in keiner Weise das Verhalten des Spielleiters berücksichtigt. Denn wenn die Kandidatin zuerst die Autotür wählt, dann (und nur dann) kann der Spielleiter sich aussuchen, welche der beiden Ziegentüren er öffnen möchte. Üblicherweise sagt man, jede der beiden verbleibenden Türen habe in diesem Falle die gleiche Chance, geöffnet zu werden. Wir wollen nun mit dieser Voraussetzung den Bayesianischen Ansatz ausführen (nach Vancsó und Wickmann (1999), siehe auch Wikipedia (2005)). Es werde mit θ_j der Zustand „Das Auto steht hinter der Tür j“ bezeichnet $(j = 1,2,3)$. Dann setzen wir a priori die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(\theta_j) = \frac{1}{3} \quad (j = 1,2,3)$$

aus der Sicht der Kandidatin fest. Nun sei folgende Situation der Fall: Die Kandidatin tippt auf Tür 1, der Spielleiter öffnet daraufhin Tür 3 (Ereignis $x = 3$). Diese sei o. B. d. A. in der ganzen Arbeit vorausgesetzt.

Damit ist

$$\mathrm{P}(x = 3|\theta_3) = 0$$

(es wird niemals die Autotüre geöffnet),

$$\mathrm{P}(x = 3|\theta_2) = 1$$

(wenn das Auto hinter der zweiten Tür ist, muss der Spielleiter die einzig verbleibende Ziegentür — Tür 3 — öffnen, nochmals: Er darf — vorerst — nicht die ursprünglich von der Kandidatin ausgesuchte Tür öffnen) und schließlich

$$\mathrm{P}(x = 3|\theta_1) = \frac{1}{2}\,.$$

Dies ist nun jene (bedingte) Wahrscheinlichkeit, die das Verhalten des Spielleiters beschreibt: Ist das Auto hinter Tür 1, öffnet er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$

Tür 3 (ebenso hätte er Tür 2 öffnen können). Mit Hilfe des Bayes'schen Theorems erhalten wir a posteriori für $j = 1, 2, 3$

$$P(\theta_j|x=3) = \frac{P(x=3|\theta_j)\cdot P(\theta_j)}{\sum_{i=1}^{3} P(x=3|\theta_i)\cdot P(\theta_i)} ,$$

das bedeutet konkret

$$\begin{aligned} P(\theta_1|x=3) &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} , \\ P(\theta_2|x=3) &= \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \\ P(\theta_3|x=3) &= \frac{0\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0 . \end{aligned}$$

Damit ist das in der Einleitung angegebene — auf klassische Weise erhaltene — Resultat bestätigt: Wechseln verdoppelt die Aussicht das Auto zu gewinnen!

3 Variationen über das Verhalten des Spielleiters

Nun kann man auf die Idee kommen das Verhalten des Spielleiters nicht wie eben zu beschreiben, nämlich letztlich durch einen Münzwurf (wenn wirklich keine Tür im Falle des Falls bevorzugt werden soll und auch sonst keine Systematik erkennbar werden soll, dann muss ein Zufallszahlengenerator, der nur zwei mögliche Zahlen generiert, zur Entscheidungsfindung herangezogen werden, z. B. eben eine Münze), sondern z. B. so: $P(x=3|\theta_1) = 1$. Das heißt, der Spielleiter reißt — wann immer es geht — Tür 3 auf (modulo der eingangs geschilderten Situation: Kandidatin tippt auf Tür 1). Welche Konsequenzen hat dieses — extreme — Verhalten? Es ist dann a posteriori

$$\begin{aligned} P(\theta_1|x=3) &= \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2} , \\ P(\theta_2|x=3) &= \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ P(\theta_3|x=3) &= 0 . \end{aligned}$$

Nun sieht es nicht mehr so gut für das Wechseln aus: Bleiben ist genauso gut. Wie kann dieses Ergebnis verstanden werden? Nun, der Spielleiter öffnet tatsächlich Tür 3. Dies kann aus zwei Gründen geschehen: Erstens deswegen, weil sein Verhalten so ist, dass er Tür 3 unbedingt gegenüber Tür 2 bevorzugt (siehe oben), wenn das überhaupt möglich ist (Zustand θ_1) oder zweitens deswegen, weil er muss: θ_2 zwingt ihn, Tür 3 zu öffnen, ob er will oder nicht. Offensichtlich verteilt sich jetzt die zur Verfügung stehende Wahrscheinlichkeitsmasse zu gleichen Teilen auf diese beiden Möglichkeiten.

Eine andere — ebenfalls extreme — Variante ist $P(x=3|\theta_1) = 0$. Das heißt, der Spielleiter vermeidet wenn immer es geht das Öffnen der dritten Tür (modulo siehe oben!). Wir kommen damit zu folgender A-posteriori-Einschätzung:

$$\begin{aligned} P(\theta_1|x=3) &= 0 = P(\theta_3|x=3) , \quad \text{also} \\ P(\theta_2|x=3) &= 1 . \end{aligned}$$

Wechseln führt also hier sicher zum Auto. Ganz klar auch — warum? — Es wird ja die ungeliebte Tür 3 aufgerissen, was der Spielleiter ja — wenn möglich — nicht tun möchte. Er tut es aber, also muss er durch die Situation dazu gezwungen werden: θ_2 ist der Fall.

Um eine Übersicht über die Auswirkungen zumindest prinzipiell möglicher unterschiedlicher Verhalten des Spielleiters zu bekommen, parametrisieren wir $P(x=3|\theta_1) =: p \in [0,1]$. Somit ist

$$P(\theta_1|x=3) = \frac{p}{p+1+0} = \frac{p}{1+p} =: b(p)$$

(für „bleiben") und

$$P(\theta_2|x=3) = 1 - \frac{p}{1+p} = \frac{1}{1+p} =: w(p)$$

(für „wechseln"), denn $P(\theta_3|x=3) = 0 \ \forall p \in [0,1]$. Der Vergleich der Graphen der Funktionen b bzw. w zeigt „WECHSELN IST NIE SCHLECHTER ALS BLEIBEN!" (Abb. 1), wegen $p \in [0,1]$ ist natürlich

$$b(p) \leq w(p) \quad \forall p .$$

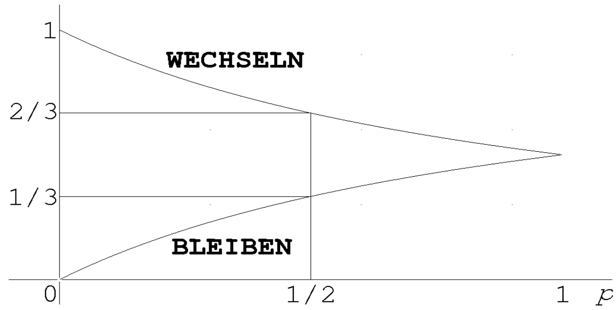

Abb. 1: Wechseln ist nie schlechter als Bleiben

Wir sehen, nur für $p = \frac{1}{2}$ deckt sich (nummerisch) die klassische Analyse des Problems mit der Bayesianischen.

In diesem Zusammenhang ist eine Idee zu erwähnen, die auf der Internetseite Grothmann (2005) veröffentlicht ist („Eine andere Idee"): „Nehmen wir an, der Showmaster entscheidet in dem Fall, in dem der Kandidat den Porsche getroffen hat, nicht mit dem Würfel, sondern nach einer festen Regel, die dem Kandidaten bekannt ist. Er öffnet beispielsweise B, wenn der Porsche hinter A steht, C bei B und A bei C, also immer die Türen rechts neben dem Porsche, d. h. neben der vom Kandidaten gewählten Tür.
Wenn der Kandidat den Porsche trifft, wird die Tür rechts daneben aufgemacht, und er weiß überhaupt nichts. In der Hälfte aller Fälle, in denen dies eintritt, wird er mit der Wechselstrategie Erfolg haben. Dasselbe gilt, wenn er die Tür rechts vom Porsche wählt. Trifft er allerdings die Tür links vom Porsche, so hat die Wechselstrategie 100% Erfolg. Insgesamt hat die Wechselstrategie wieder eine Erfolgswahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$. [...]"

Hier wird also der Münzwurf („Würfel") durch eine feste — auch dem Kandidaten bekannte — Regel ersetzt. Das Verhalten des Spielleiters ist nun in jedem Fall determiniert. Die Gewinnwahrscheinlichkeiten ändern sich aber nicht (siehe Abschnitt 1) — wie bei allen nicht-Bayesianischen Betrachtungen (Mitteilung von Herrn Wickmann, Aachen).

Dabei darf folgender grundlegender Unterschied nicht übersehen werden: Der Bayes-Ansatz modelliert das Verhalten des Spielleiters für den Fall, dass zuerst die Autotür erwischt wurde, die eben referierte neue Regel (für dieselbe Situation!) wird dahingehend untersucht, ob mit ihr die Wechselstrategie neu bewertet werden muss („nein", diese „andere Idee" stellt nur eine Variante an der handelnden Oberfläche dar, sie ist im Grunde in der klassischen Beschreibung enthalten).

Letztlich stecken hinter diesen semantischen — und leider im Sinne der Klarheit nicht immer nummerischen — Differenzen unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsbegriffe, die den jeweiligen Betrachtungsweisen zugrunde liegen: Die klassische Lösung (siehe Abschnitt 1) ist frequentistisch zu deuten: Auf lange Sicht (d. h. bei oftmaligen Durchführungen des Spiels) wird in $\frac{2}{3}$ der Fälle das Auto gewonnen, wenn alle Kandidat/innen sich der Wechselstrategie bedienen. Verfolgen alle die Bleibenstrategie, dann passiert dies à la longue in $\frac{1}{3}$ der Fälle. Voraussetzung ist, dass bei jedem Spiel das Auto jeweils die Chance $\frac{1}{3}$ hat, hinter einer bestimmten Tür zu stehen.

Die Bayesianische Lösung liefert eine Bewertungsgrundlage einer Einzelsituation. Wie soll sich die Kandidatin hic et nunc verhalten, nachdem der Spielleiter eine Tür geöffnet hat? Weiß sie nichts über seine Vorlieben bzw. weiß sie, dass er im Falle des Falles eine Münze wirft (bzw. vorsorglich vor dem Spiel geworfen hat), bringt Wechseln eine Erfolgschance von $\frac{2}{3}$ (im Vergleich zu $\frac{1}{3}$ vor dem Öffnen der Tür) mit sich, kennt sie gewisse Tendenzen bei ihm, kann diese Erfolgschance sogar noch größer, aber auch kleiner werden.

Mit dem Bayesianischen Ansatz springt man also mitten in den Geschehensablauf hinein und fragt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten das Auto hinter den beiden noch verschlossenen Türen steht. Das sind zwei mögliche Zustände; man fragt also nach sogenannten Zustandswahrscheinlichkeiten oder Erkenntniswahrscheinlichkeiten (und nicht nach Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Zufallsereignisse).

Was heißt nun konkret mit $p = \frac{3}{4}$ ist $w\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$ und damit $b\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{7}$? — Eine Deutung passiert über eine fiktive faire Wette zwischen zwei Partnern: „Fair" bedeutet dabei der Wetteinsatz entspricht der Gewinnerwartung, „fiktiv" ist die Wette deswegen, weil ja tatsächlich das Auto gewonnen wird oder nicht. Sei z. B. der Wert des Autos $a = 14000$ Euro. Entscheidet sich die Kandidatin für „Wechseln", dann müsste sie $14000 \cdot \dfrac{4}{7} = 8000$ Euro Einsatz zahlen, ihr Wettpartner dagegen nur $14000 \cdot \dfrac{3}{7} = 6000$ Euro. Mit anderen Worten: $w(p) \cdot a$ ist die Gewinnerwartung eines unsicheren Gewinns bei der Wechselstrategie. Auf diese Weise gelingt eine operationale Deutung von $w(p)$ und $b(p)$.

Wie können Näherungswerte für p ermittelt werden? — Durch Beobachten des Verhaltens des Spielleiters in der passenden Situation wenn das Auto hinter Tür 1 steht und die Kandidatin ebendiese Tür (zunächst) erwählt hat. Relative Häufigkeiten des Öffnens von Tür 2 bzw. Tür 3 sind gute Schätzwerte für den unbekannten Parameter p. Allgemeiner sind die Situationen von Interesse, in denen die Kandidatin gleich auf die Autotür getippt hat und damit eben der Spielleiter wählen kann, welche Tür er öffnen wird. Eventuell sind auf Beobachtung gestützte Aussagen wie „der Spielleiter öffnet bevorzugt die ihm nähere Tür, wenn er die Wahl hat" möglich. Allerdings muss schon gesagt werden, dass innerhalb des hier diskutierten Modells die Kenntnis von (Näherungswerten von) p keine Auswirkung auf die Strategie der Kandidatin hat: „WECHSELN IST NIE

SCHLECHTER ALS BLEIBEN“ ist und bleibt die zentrale Botschaft in diesem Rahmen.

Nochmals sei auf den Umstand hingewiesen, dass der Parameter p (also das Verhalten des Spielleiters) in der klassischen Beschreibung des Problems keine Rolle spielt. Dementsprechend sind auch die Ergebnisse der klassischen und Bayesianischen Lösung unterschiedlich zu interpretieren, auch wenn sie nummerisch gleich sind. Daher kann schon an diesem (einfachen) Beispiel sehr viel über die verschiedenen Auffassungen von Wahrscheinlichkeit gesagt werden.

4 Eine Änderung der Regeln

In Brunner und Kühleitner (2004) wird über folgende Regeländerung und ihre Konsequenzen berichtet: Der Spielleiter kann das Spiel beenden, indem er gleich die von der Kandidatin gewählte Tür öffnet, sofern sich dahinter eine Ziege verbirgt. Er mache das zufällig mit der Wahrscheinlichkeit q. Für $q = 1$ ist alles determiniert: Öffnet der Spielleiter die von der Kandidatin gewählte Tür, ist das Spiel sowieso aus, öffnet er eine andere Tür, dann hat die Kandidatin auf die Autotür getippt und muss daher bleiben. Dagegen ist $q = 0$ die ursprüngliche Situation. Wie sind nun die Strategien „bleiben“ und „wechseln“ für $0 < q < 1$ zu bewerten?

Bleibt die Kandidatin, so ist die Gewinnchance nach wie vor $\frac{1}{3}$, denn mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ erwischt sie beim ersten Mal die Autotür. Wechselt dagegen die Kandidatin, so ist ihre Erfolgsaussicht $\frac{2}{3} \cdot (1 - q)$, weil mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ist sie zuerst bei der falschen Tür und dann wird mit der (bedingten) Wahrscheinlichkeit $1 - q$ diese nicht geöffnet. Nun kann auch der Spielleiter durch die Wahl von q eine Strategie wählen, die zumindest langfristig den Erfolg der Kandidat/innen unabhängig von ihrem jeweiligen Verhalten (bleiben oder wechseln) minimiert. Für $q > \frac{1}{2}$ ist $1 - q < \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3} \cdot (1 - q) < \frac{1}{3}$. Das heißt mit $q \geq \frac{1}{2}$ drückt der Spielleiter die Erfolgschance der Kandidat/innen auf höchstens $\frac{1}{3}$. („Bleiben“ ist dann für $q > \frac{1}{2}$ die bessere Strategie, für $q = \frac{1}{2}$ ist „Bleiben“ so gut wie „Wechseln“.)

In Grothmann (2005) wird darauf hingewiesen, dass es klar sein muss, ob der Spielleiter eine nicht gewählte Tür öffnen muss oder auch die gewählte öffnen kann. Im zweiten Fall ist seine optimale Taktik die, erst gewählte Ziegentüren zu öffnen und bei erstgewählten Autotüren eine Ziegentüre zu öffnen und dann die Frage nach Wechseln oder Bleiben zu stellen. Die Gewinnchance für die Kandidatin ist dann (höchstens) $\frac{1}{3}$. In Brunner und Kühleitner (2004) wird die neue Situation (und nur diese) auch Bayesianisch dargestellt. Dabei wird $p = \frac{1}{2}$ gesetzt.

Wir werden nun das Bayesianische Modell mit zwei Parametern (p und q) für das Ziegenproblem entwickeln. Die Situation sei wieder, dass die Kandidatin auf Tür 1 tippt und der Spielleiter die Tür 3 öffnet (Ereignis $x = 3$). A priori setzen wir wie gehabt

$$\mathrm{P}(\theta_j) = \frac{1}{3} \quad (j = 1, 2, 3)\ .$$

Es ist unverändert

$$\mathrm{P}(x = 3|\theta_3) = 0\ ,$$

nun neu ist

$$\mathrm{P}(x = 3|\theta_2) = 1 - q\ ,$$

denn der Spielleiter könnte auch die erste (gewählte) Tür in diesem Fall (und nur in diesem — θ_3 ist ja offensichtlich nicht der Fall!) mit Wahrscheinlichkeit q öffnen.
Letztlich ist wieder

$$\mathrm{P}(x = 3|\theta_1) = p\ ,$$

es geht also nun an zwei Stellen das Verhalten des Spielleiters in unser Modell ein.
A posteriori berechnen wir mit dem Bayes’schen Theorem

$$\mathrm{P}(\theta_j|x = 3) = \frac{\mathrm{P}(x = 3|\theta_j) \cdot \mathrm{P}(\theta_j)}{\mathrm{P}(x = 3)} \quad (j = 1, 2, 3)\ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x = 3) &= \mathrm{P}(x = 3|\theta_1) \cdot \mathrm{P}(\theta_1) + \\ &\quad + \mathrm{P}(x = 3|\theta_2) \cdot \mathrm{P}(\theta_2) + \\ &\quad + \mathrm{P}(x = 3|\theta_3) \cdot \mathrm{P}(\theta_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot [p + (1 - q) + 0] = \frac{1}{3} \cdot (p + 1 - q) \end{aligned}$$

ist. Somit ist

$$\mathrm{P}(\theta_1|x = 3) = \frac{p \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot (p + 1 - q)} = \frac{p}{p + 1 - q} =: \tilde{b}(p, q)$$

die „Bleiben“-Funktion und

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta_2|x = 3) &= \frac{(1 - q) \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot (p + 1 - q)} = \frac{1 - q}{p + 1 - q} = \\ &= 1 - \tilde{b}(p, q) =: \tilde{w}(p, q) \end{aligned}$$

die „Wechseln“-Funktion für diese Situation. Die Funktion $\tilde{b}$ ist für alle Werte $0 \leq p, q \leq 1$ mit Ausnahme von $(p, q) = (0, 1)$ definiert, für $q = 1$ halten

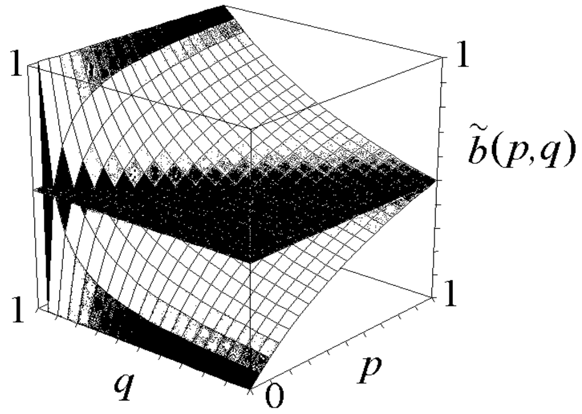

Abb. 2: Der Graph der „Bleiben"-Funktion

wir $\tilde{b}(p,1) = 1 \; \forall p \in (0,1]$ fest. In Abb. 2 sehen wir den (dreidimensionalen) Graphen der Funktion $\tilde{b}$.

Man erkennt, dass

$$\tilde{b}(p,q) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow p+q > 1$$

ist. (Die Ebene $z = \frac{1}{2}$ ist ebenfalls in Abb. 2 zu sehen.) Analytisch läßt sich das für $(p,q) \neq (0,1)$ leicht nachrechnen:

$$\frac{p}{p+1-q} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow p+q > 1 \; .$$

Unser Resümee lautet daher: BLEIBEN IST GENAU DANN BESSER ALS WECHSELN, WENN $p+q > 1$ IST! [Der Fall $q = 1$ und $p = 0$, der in obiger Umformung ausgeschlossen ist, ist schwierig zu interpretieren: $p = 0$ bedeutet Wechseln führt sicher zum Erfolg, $q = 1$ dagegen, Bleiben bringt sicher das Auto. Mathematisch äußert sich das so, dass $\lim\limits_{\substack{q\to 1\\ p\to 0}} \tilde{b}(p,q)$ von der Form $\frac{0}{0}$, also ein unbestimmter Ausdruck ist.]

Dieses an sich einfache (mathematische) Resultat ist nicht ohne weiteres zu verstehen. Die Wahrscheinlichkeiten p und q betreffen ganz unterschiedliche Situationen: Wenn die Kandidatin zuerst auf die Autotür tippt, kommt p ins Spiel, ist sie dagegen zuerst auf einer Ziegentür, dann q. Trotzdem sind sie auf diese einfache (mathematische) Weise miteinander verknüpft.

Für $p = \frac{1}{2}$ ist

$$\tilde{b}\left(\frac{1}{2},q\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-q} = \frac{1}{3-2\cdot q} \; .$$

Wir wissen schon, wenn $q > \frac{1}{2}$ ist, ist $p+q > 1$ und $\tilde{b}(\frac{1}{2},q) > \frac{1}{2}$ (und vice versa). Auch inhaltlich ist dies leicht zu verstehen: Wenn der Spielleiter gerne das Spiel vorzeitig beendet ($q > \frac{1}{2}$), und er tut es nicht (er öffnet Tür 3, auf Tür 1 wurde getippt), dann liegt der Verdacht nahe, dass die Kandidatin gleich die Autotür erwischt hat, also sollte sie bleiben.

Für $q = 0$ ist

$$\tilde{b}(p,0) = \frac{p}{1+p} = b(p) \; ,$$

das erste Bayesianische Modell ist also auch in diesem zweiten enthalten.

Der Fall $q = 1$ liefert wie oben festgestellt für $p \neq 0$

$$\tilde{b}(p,1) = \frac{p}{p+1-1} = 1 \; ,$$

was leicht zu erklären ist: Wenn immer es geht, bricht der Spielleiter das Spiel vorzeitig ab, er tut es nicht, also muss die Kandidatin auf die Autotür getippt haben: „Bleiben!"

5 Didaktischer Kommentar

Das Verhalten des Spielleiters ist durch die Einführung der Parameter p und q variiert worden, was zu einer Modellbildung von ebendiesem führt. Dass menschliches Verhalten — in diesem Sinn wenigstens — Eingang in (einfache) mathematische Modelle findet, passiert sicher selten in der Schulmathematik und bringt eine fast exotische Stellung dieser Sichtweise im Mathematikunterricht mit sich. In gewisser Weise spiegelt sich in der Bayesianischen Beschreibung dieser (subjektiv) stochastischen Situation das grundlegende Prinzip der gesamten Bayes-Statistik wider: Ausgehend von einer A-priori-Einschätzung (jede der Türen kommt in gleicher Weise als Autotür in Frage) liefern Vorwissen (über das Verhalten des Spielleiters) und Datum (Tür 3 wird geöffnet, nachdem auf Tür 1 getippt worden ist) eine A-posteriori-Beurteilung der „Welt“ [i. e. drei Türen, eine davon offen, eine andere (vorerst) ausgewählt].

Die Gegenüberstellung klassische-Bayesianische Beschreibung des Ziegenproblems zeigt auch sehr deutlich die unterschiedlichen Sichtweisen von Wahrscheinlichkeit: frequentistisch versus subjektivistisch oder instruktiver: Vorwärtswahrscheinlichkeiten versus Zustandswahrscheinlichkeiten.

Entscheidend ist aber in jedem Fall, dass die berechneten Ergebnisse (für Spezialfälle) im Großen und Ganzen zufriedenstellend interpretiert werden können. Es ist ganz wichtig, dass diese Rückübersetzung im Unterricht auch tatsächlich passiert, darin liegt meines Erachtens der eigentliche didaktische Wert dieser Thematik.

Die Einführung der Variablen bzw. Parameter p und q und der damit verbundene Erhalt einer „Bleiben“- bzw. „Wechseln“-Funktion schaffen einen Überblick in Form der jeweiligen Funktionsgraphen über das mögliche Geschehen. Hier liegt wohl eine typische mathematische Tätigkeit, nämlich das Untersuchen von Abhängigkeiten, vor, die sich aus der in Rede stehenden Sache heraus ergibt. Die Änderung — Erweiterung der Spielregeln lässt sich mit den ursprünglichen Methoden behandeln (Einführung einer Variablen, Erhalt einer Funktion, Zeichnen und Betrachten des Funktionsgraphen), wenngleich die Resultate natürlich komplexer werden, was sich nicht zuletzt in der dreidimensionalen Darstellung des Funktionsgraphen äußert. Die Abschätzung „größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$“ gelingt ebenfalls ganz einfach, so dass hier eine (wieder aus der betrachteten Situation heraus gewonnene) Anwendung von mehrdimensionalen Funktionen vorliegt. Die aus der Abbildung des Graphen erzielte Vermutung kann analytisch leicht erhärtet werden. Die Forderung, dass auch zumindest zweistellige Funktionen den Mathematikunterricht bereichern sollen, ist ja immer wieder erhoben worden, siehe z. B. Schweiger (1995) oder Humenberger (1999). Realistischerweise wird die Betrachtung mehrdimensionaler Funktionen nicht unbedingt im Regelunterricht zum Standard werden, für Leistungskurse oder ähnliche Einrichtungen könnte dieser Vorschlag jedoch eine überlegenswerte Anregung darstellen.

Über das Ziegenproblem ist viel geschrieben worden. Hier geht es einzig und alleine darum, exemplarisch die uralte didaktische Forderung nach Thematisierung der Modellbildung, Auswertung und Interpretation zu erfüllen. Es sollte gezeigt werden, wie mit geringem mathematischen Aufwand dennoch eine gehaltvolle Einsicht in eine reale Situation gewonnen werden kann.

Literatur

Brunner, N. und Kühleitner, M. (2004): Das Ziegenproblem in Excel. In: Wissenschaftliche Nachrichten Nr. 125 (Juli/August 2004), S. 35–37.

Grothmann, R. (2005): Das Ziegenproblem. `http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/Projekte/ZiegenProblem/` (29.7.2005).

Humenberger, H. (1999): Längen- und Winkelmessungen bei der Höhenbestimmung von Türmen. Optimierung und Fehlerbetrachtungen. In: J. Maaß und W. Schlöglmann (Herausgeber): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe, Band 5). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker, S. 51–64.

Schweiger, F. (1995): Funktionen in mehreren Variablen — Aschenputtel der Schulmathematik. In: Didaktik-Reihe der „Österreichischen Mathematischen Gesellschaft“, Heft 24 (Oktober 1995), S. 21–34.

Vancsó, Ö. und Wickmann, D. (1999): Das Drei-Türen-Problem in bayesscher Sicht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Vorträge auf der 33. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5.3.1999 in Bern für die GDM herausgegeben von Michael Neubrand. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker, S. 551–554.

Wikipedia (2005): Ziegenproblem. `http://de.wikipedia.org/wiki/Ziegenproblem` (29.7.2005).

Anschriften des Verfassers:
Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Nordbergstraße 15
A-1090 Wien
und
Akademisches Gymnasium Wien I.
Beethovenplatz 1
A-1010 Wien

`Stefan.Goetz@univie.ac.at`