

Statistik der Aktienmärkte: Eine anwendungsorientierte Einführung in die Beschreibende Statistik

PEGGY DAUME, BERLIN

Zusammenfassung: In der stochastischen Finanzmathematik, einem der jüngeren Gebiete der Angewandten Mathematik, wurden in den letzten Jahren immer leistungsfähigere Modelle zur Analyse und Bewertung von Aktien und Optionen aller Art entwickelt. Die grundlegenden Ideen dieser Modelle basieren auf der Wahrscheinlichkeitstheorie, die in den meisten Lehrplänen für den Mathematikunterricht verankert ist. Liegt es da nicht nahe, den Stochastikunterricht mittels Finanzmathematik anwendungsbezogener zu gestalten? Im Folgenden wird ein Weg beschrieben, wie wesentliche Inhalte der „Beschreibenden Statistik“ anhand von Daten der Aktienmärkte erarbeitet werden können. Darüber hinaus wird ein kleiner Ausblick über die Verwendung statistischer Kenngrößen im so genannten Binomialmodell gegeben. Die vorgestellte Unterrichtseinheit wurde in einer 9. Klasse in einem Wahlpflichtkurs Mathematik an einem Berliner Gymnasium erfolgreich erprobt und umfasst 16 Unterrichtsstunden.

1 Der Preis einer Aktie

Die Unterrichtseinheit begann mit einer Einführung in grundlegende ökonomische Hintergründe. Ausgehend von aktuellen Geschehnissen am Aktienmarkt wurden zunächst wichtige Begriffe rund um das Thema „Aktie“ geklärt. Neben der Frage, wie der Handel mit Aktien verläuft, lag der Schwerpunkt dieses Abschnittes in der Bestimmung des Preises bzw. Kurses einer Aktie (vgl. Winter).

Am Börsenparkett dürfen nur registrierte Börsenmitglieder wie Banken und Wertpapierhändler Geschäfte abschließen, so dass jeder, der in Deutschland Aktien beziehen möchte, Kaufaufträge bei den entsprechenden Institutionen einreichen muss. An der Börse treten speziell ausgebildete Handelsmittler, die so genannten Skontroführer¹, als Vermittler zwischen die Händler der verschiedenen Banken und versuchen, innerhalb kürzester Zeit so viele Geschäfte wie möglich zu vermitteln. Die Aufgabe des Skontroführer ist es dabei, nach Eingang aller Aufträge einen marktgerechten Preis für die Aktie festzulegen. Dabei ist jeder Skontroführer aus-

schließlich für die Betreuung eines Wertpapiers zuständig.

Der Preis einer Aktie wird u.a. durch das Prinzip „Angebot und Nachfrage“ geregelt. Dazu sammelt der Skontroführer in seinem Order- bzw. Skontrobuch alle eingehenden Kauf- und Verkaufsanträge. Das Orderbuch wird im Börsenverlauf regelmäßig, bei regem Handel alle paar Sekunden, geschlossen. Aus den vorliegenden Werten wird derjenige Preis bestimmt, bei dem die meisten Aktien umgesetzt werden. Stehen beispielsweise einem Angebot von 200 Aktien zu einem bestimmten Preis eine Nachfrage von nur 150 Aktien gegenüber, können lediglich 150 Aktien umgesetzt werden, für 50 Aktien gibt es keinen Käufer. Der vom Skontroführer festgelegte Preis wird anschließend als aktueller Kurs der betreffenden Aktie veröffentlicht. Dazu folgendes Beispiel:

Beispiel: Der Sportverein „Mathenio“ ist an der Frankfurter Börse notiert. Herr Finanzia ist als Skontroführer mit der Aufgabe betraut, den Kurs für die Aktie zu bestimmen. Tabelle 1 zeigt einen Auszug aus dem Orderbuch. Die zweite Zeile der Tabelle ist wie folgt zu lesen: 124 Aktien der Firma „Mathenio“ finden für einen Preis von höchstens €8,20 einen Käufer. Demgegenüber stehen 74 Aktien bei einem Kurs von mindestens €8,20 zum Verkauf.

Preis in €	Anzahl der Käufer	Anzahl der Verkäufer
8,20	124	74
8,40	210	179
8,60	136	142
8,80	121	166
9,00	98	120
9,20	40	71

Tabelle 1: Auszug aus dem Orderbuch

Wer für seine Aktie maximal €9,20 ausgeben würde, kauft die Aktie auch bei einem niedrigeren Kurs. Wer bereit ist, seine Aktie für mindestens €8,20 zu verkaufen, verkauft auch zu einem höheren Preis. Es ist daher zunächst die Anzahl der

¹ Bis zur Änderung des Börsengesetzes im Jahr 2002 wurden Skontroführer als Aktienmakler bezeichnet.

Preis in €	Anzahl der Käufer	Anzahl der Verkäufer	Anzahl der Käufer gesamt	Anzahl der Verkäufer gesamt	Umsetzbare Aktien
8,20	124	74	729	74	74
8,40	210	179	605	253	253
8,60	136	142	395	395	395
8,80	121	166	259	561	259
9,00	98	120	138	681	138
9,20	40	71	40	752	40

Tabelle 2: Bestimmung des Preises einer Aktie

Käufer bzw. Verkäufer zu bestimmen, die bei den gegebenen Kursen insgesamt bereit sind, Aktien zu kaufen oder zu verkaufen. Tabelle 2 zeigt die Gesamtanzahl der Käufer und Verkäufer und die Anzahl der umsetzbaren Aktien zu einem bestimmten Preis. Da in unserem Beispiel die Anzahl der umsetzbaren Aktien bei einem Preis von €8,60 maximal ist, wird der Makler diesen Preis als neuen Aktienkurs festlegen.

Was passiert, wenn sich die Anzahl der Käufer und Verkäufer nicht wie in unserem konstruierten Beispiel, das im Unterricht der Einführung diente, ausgleichen? Diese Frage konnten wir uns bei einem Besuch der Berliner Börse von einem Fachmann beantworten lassen. Der amtliche Skontroführer gleicht geringe Unterschiede zwischen angebotenen und nachgefragten Aktien aus, indem er Aktien aus seinem Bestand verkauft oder Aktien kauft. Damit soll gesichert werden, dass möglichst alle Käufer und Verkäufer einer Aktie bei einem bestimmten Preis bedient werden. Der amtliche Skontroführer wird jedoch keine Kaufwünsche abwickeln, wenn keine Verkaufswünsche vorliegen.

2 Die graphische Darstellung von Aktienkursen

Die Schüler sammelten als langfristige Hausaufgabe Schlusskurse einiger Aktien. Schon bei der Auswertung zeigte sich, dass die Schüler diese Aufgabe auf verschiedene Arten lösten. Einige der Schüler schrieben lediglich die Schlusskurse tabellarisch auf, andere schnitten die jeweiligen Informationen aus der Zeitung aus, wiederum andere hatten die Schlusskurse graphisch dargestellt. Damit hatten wir bereits einige Darstellungsarten, die wir anschließend zusammentrugen und verglichen. Wir klärten den Aufbau der Tabellen, die neben den Schlusskursen oft auch Informationen zu den niedrigsten und höchsten Kursen des Tages enthalten. Die Auswertung gra-

phisch dargestellter Aktienkurse führte uns u.a. zu Liniencharts und Candlestickcharts. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen jeweils den Verlauf der Volkswagen-Aktie im Zeitraum vom 12.02.04 bis 24.02.04. Die unter www.consors.de verfügbaren Aktiencharts wurden der besseren Lesbarkeit wegen mit Excel neu erstellt.

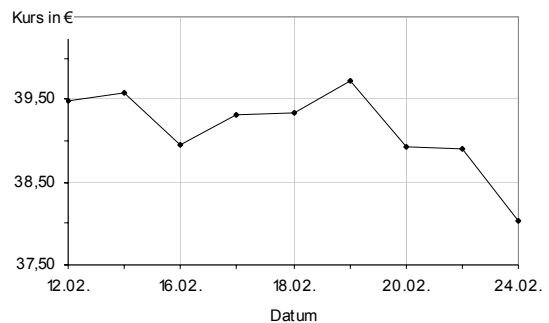


Abbildung 1: Linienchart

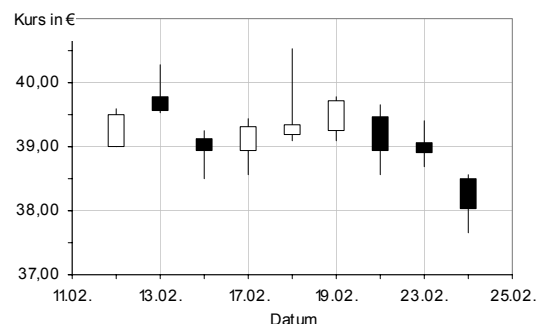


Abbildung 2: Candlestickchart

Liniencharts zeigen in der Regel den Verlauf der Schlusskurse innerhalb bestimmter Zeiträume. Candlestickcharts hingegen stellen sowohl den Eröffnungskurs, den Schlusskurs, den höchsten Kurs und den niedrigsten Kurs einer Aktie an einem bestimmten Tag graphisch dar. Die Enden der Rechtecke geben dabei die Eröffnungs- und Schlusskurse wieder. Liegt der Eröffnungskurs über dem Schlusskurs, so ist das Rechteck farblich gefüllt. Den höchsten und den niedrigsten Kurs

kann man an den Endpunkten der Linie oberhalb und unterhalb des Rechteckes ablesen.

Der Vergleich von Aktien erfolgte anhand der Adidas-Aktie (Abbildung 3) und der Schering-Aktie (Abbildung 4) im Zeitraum vom 12.02.04 bis 24.02.04 (ebenfalls mit Excel nachbearbeitet).

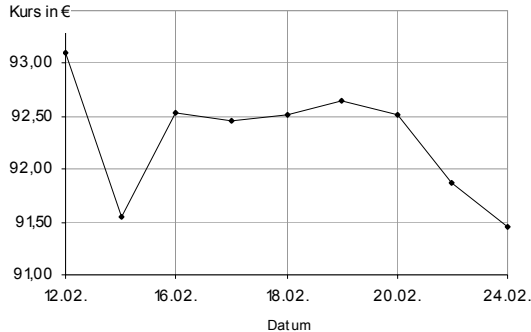


Abbildung 3: Kursverlauf der Adidas-Aktie

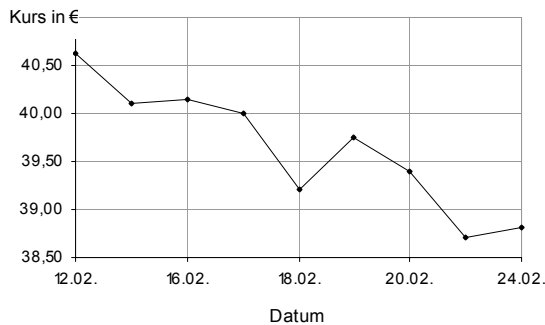


Abbildung 4: Kursverlauf der Schering-Aktie

Die Schüler sollten sich entscheiden, welche Aktie sie kaufen würden. Die meisten Schüler entschieden sich für die Adidas-Aktie, allerdings begründeten sie ihre Wahl nur einseitig. Sie machten ihre Entscheidung lediglich vom Verlauf der Aktie abhängig. Die folgende Begründung spiegelt die Auffassung der Klasse wider: „Beide Aktien sanken um ca. €2,00. Die Schering-Aktie ist in der Vergangenheit jedoch fast gleichmäßig gefallen und wird das in Zukunft weiterhin tun. Die Adidas-Aktie hingegen ist mal stark gefallen, dann aber wieder stark gestiegen, so dass wir davon ausgehen können, dass sich die Aktie auch in Zukunft derart verhalten wird.“ Lediglich ein Schüler argumentierte umfassender: „Wenn ich zwei Aktien von Schering gekauft hätte, die insgesamt etwa genauso viel wert sind wie eine Adidas-Aktie, dann hätte ich ca. €4,00 Verlust gemacht, wohingegen ich bei der Adidas-Aktie beim gleichen Einsatz nur etwa €2,00 verloren hätte. Also hat sich die Adidas-Aktie günstiger entwickelt, so dass ich diese kaufen würde, vorausgesetzt, dass sich diese Entwicklung fortsetzt.“

Der oberflächliche Umgang der Klasse mit den graphischen Abbildungen wurde zum Anlass genommen, den Schülern das zufällige Verhalten von Aktienkursen bewusst zu machen. Ein extremes Beispiel zeigt die Auswertung von Aktienkursen um den 11. September 2001. Die Anschläge auf das World Trade Center in New York führten kurzzeitig bei allen Aktien zu starken Kursverlusten. Als weiteres Beispiel sei die Borussia-Dortmund-Aktie genannt, deren Kursverlauf von den sportlichen Erfolgen bzw. Misserfolgen von Borussia Dortmund abhängen kann. Aktienkurse werden also nicht nur durch die Entwicklungen in der Aktiengesellschaft selbst, sondern auch durch Ereignisse aus dem wirtschaftlichen, politischen und gesellschaftlichen Umfeld beeinflusst. Diese kursrelevanten Ereignisse sind in der Regel nicht vorhersehbar, sondern zufällig, so dass sich Aktienkurse ebenso zufällig bewegen. Das Auf und Ab der Aktienkurse ist somit ein Zufallsprozess. Man sagt auch, dass Aktienkurse eine Irrfahrt (engl. Random Walk) vollführen.

Weiterhin galt es, die Schüler für einen kritischen Umgang mit graphischen Darstellungen zu sensibilisieren. Sie erhielten die Aufgabe, in diversen Tageszeitungen nach Graphiken zu suchen, die zugrunde liegende Daten durch die gewählte manipulierende Darstellung geschönt abbilden. Einen Fundus für derartige Abbildungen liefern „So lügt man mit Statistik“ (Krämer, 2004) und „Die etwas andere Aufgabe“ (Herget, 1998).

3 Die Rendite einer Aktie

Der schwierige Vergleich der Aktienentwicklungen mit graphischen Darstellungen führte uns zur Rendite einer Aktie. Die Rendite ist eine Kennzahl für Aktien, die es ermöglicht, Angaben zur Ertragskraft einer Aktie zu machen oder Erträge verschiedener Aktien mit unterschiedlichen Preisen miteinander zu vergleichen. Beim Handel mit Aktien und anderen Wertpapieren wird das Verhältnis zwischen Gewinn (bzw. Verlust) und Einsatz als Rendite bezeichnet. Die Rendite bezieht sich stets auf einen bestimmten Zeitraum (typischerweise Tag, Woche, Monat, Vierteljahr oder Jahr). Berechnet wird die Rendite aus den Kursen am Anfang und am Ende des Zeitraumes gemäß der Formel

$$\text{Rendite} = \frac{\text{Endkurs} - \text{Anfangskurs}}{\text{Anfangskurs}}$$

Dabei geben positive Renditen Kursanstiege, negative Renditen Kursverluste an.

Beispiel: Der Kurs der Adidas-Aktie betrug am 23.02.04 genau €91,88, einen Tag später €91,46. Damit betrug die Tagesrendite am 24.02.04

$$\text{Rendite} = \frac{€91,46 - €91,88}{€91,88} = -0,0045 = -0,45\%$$

Die Adidas-Aktie ist also vom 23.02.04 zum 24.02.04 um 0,45% gesunken.

4 Statistische Untersuchung von Aktienrenditen

Nach einer kurzen Einführung der Begriffe Mittelwert und Standardabweichung anhand aktienfremder Beispiele wurde die inhaltliche Bedeutung der Begriffe im Zusammenhang mit Aktien geklärt. Der Schwerpunkt lag hierbei in der Interpretation dieser zwei wichtigen Kenngrößen, die das Verhalten von Aktienkursen widerspiegeln.

Der Mittelwert der Renditen gibt die durchschnittliche relative Kursänderung pro Zeitraum an und stellt somit ein Trendmaß dar. Die Standardabweichung der Renditen hingegen ist ein Streuungsmaß und gibt die durchschnittliche quadratische Abweichung der einzelnen relativen Kursänderungen vom Mittelwert an. Je größer die Standardabweichung ist, desto mehr schlägt der Kurs nach oben oder unten aus. Damit steigt einerseits die Chance auf Gewinne. In gleichem Maß steigt aber auch das Risiko von Kursverlusten. Die Standardabweichung stellt in diesem Kontext betrachtet ein Chancen- bzw. Risikomaß dar.

Anschließend untersuchten wir die Verteilung von Renditen. Dazu erhielten die Schüler zunächst eine Tabelle mit 52 Wochenrenditen der Adidas-Aktie im Zeitraum vom 17.03.03 bis 08.03.04 (Tabelle 3), die in einem Häufigkeitsdiagramm dargestellt werden sollte. Die meisten Schüler erkannten schnell, dass die Mehrzahl der Renditen mit einer absoluten Häufigkeit von Eins auftrat. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, schlugen die Schüler daher vor, mehrere benachbarte Renditen zu einem Intervall bzw. zu einer Klasse zusammenzufassen. Zur Bestimmung der Anzahl der Klassen und der Breite einer Klasse gibt es eine Reihe von Faustregeln. Alle zielen darauf ab, dass nicht zu viele oder zu wenige Klassen gebildet werden. Ist die Klassenanzahl zu hoch, kann die Darstellung unübersichtlich bleiben, bei zu niedriger Klassenanzahl liefert die Darstellung kaum Information. Wir entschieden uns für die Bildung von 9 Klassen. Da gleich große Klassen gebildet werden sollen, wird die Klassenbreite Δx aus der Anzahl n der Klassen gemäß der Formel

$$\Delta x = \frac{1}{n}(x_{\max} - x_{\min})$$

bestimmt, wobei x_{\max} der größte Wert und x_{\min} der kleinste Wert der Datenmenge ist. Wäre genügend Zeit vorhanden gewesen, hätten die Schüler mit verschiedenen Klasseneinteilungen experimentieren und den Einfluss der Klasseneinteilung erkunden können.

Datum	Rendite	Datum	Rendite	Datum	Rendite
17.03.03	0,0747	21.07.03	-0,0234	17.11.03	-0,0469
24.03.03	-0,0004	28.07.03	-0,0075	24.11.03	0,0696
31.03.03	0,0249	04.08.03	-0,0304	01.12.03	-0,0128
07.04.03	-0,0115	11.08.03	0,0186	08.12.03	0,0253
14.04.03	0,0200	18.08.03	0,0079	15.12.03	0,0184
22.04.03	0,0038	25.08.03	0,0553	22.12.03	0,0099
29.04.03	-0,0780	01.09.03	0,0037	29.12.03	0,0567
05.05.03	0,0027	08.09.03	-0,0111	05.01.04	-0,0339
12.05.03	-0,0173	15.09.03	-0,0106	12.01.04	0,0078
19.05.03	-0,0395	22.09.03	0,0425	19.01.04	0,0406
26.05.03	0,0081	29.09.03	-0,0181	26.01.04	-0,0496
02.06.03	-0,0207	06.10.03	0,0402	02.02.04	0,0202
09.06.03	0,0212	13.10.03	-0,0041	09.02.04	-0,0160
16.06.03	0,0401	20.10.03	-0,0004	16.02.04	0,0106
23.06.03	-0,0465	27.10.03	0,0039	23.02.04	-0,0217
30.06.03	-0,0082	03.11.03	0,0536	01.03.04	0,0331
07.07.03	-0,0280	10.11.03	0,0058	08.03.04	-0,0011
14.07.03	0,0474				

Tabelle 3: Wochenrenditen der Adidas-Aktie (17.03.03 – 08.03.04)

Nach der Auswertung von entsprechend großen Datenmengen und verschiedenen Aktien konnte auf typische Merkmale der Verteilung der Aktienrenditen geschlossen werden. Die Abbildung 5 zeigt die Verteilung der 52 Renditen der Adidas-Aktie. Sie hat annähernd eine glockenförmige Gestalt. Die Renditen sind fast symmetrisch um den Mittelwert $m = 0,0044 \approx 0$ verteilt. Die Standardabweichung beträgt $s = 0,032$ und etwa 2/3 aller Daten liegen im Intervall $[m - s, m + s]$, etwa 95% im Intervall $[m - 2s, m + 2s]$. In vielen Fällen kann für die Beschreibung der Verteilung der Renditen eine Normalverteilung als Näherung

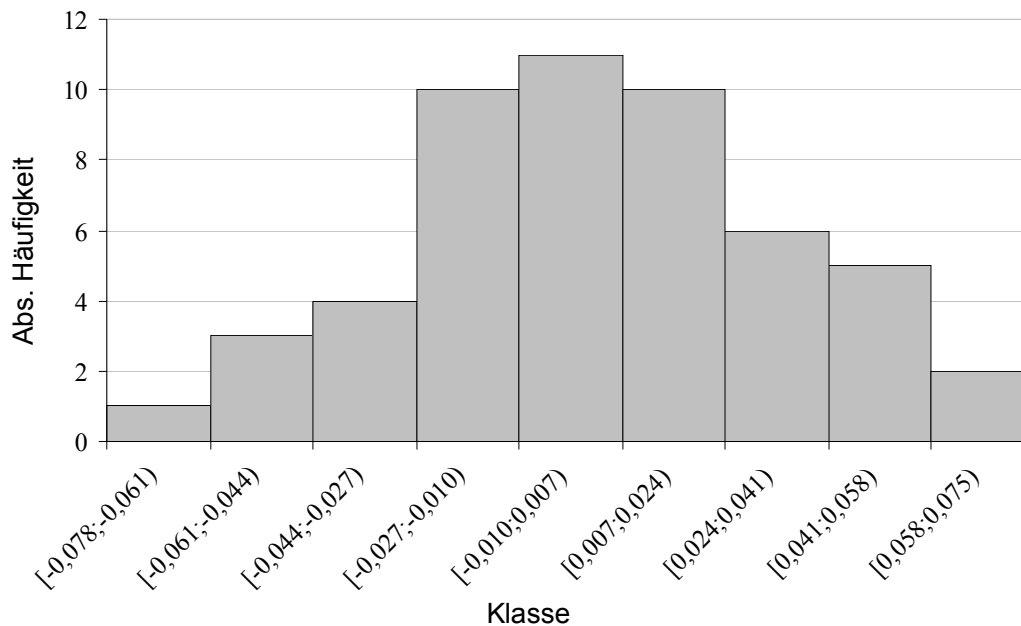


Abbildung 5: Verteilung der Wochenrenditen der Adidas-Aktie (17.03.03–08.03.04)

verwendet werden. Für die statistische Untersuchung eignen sich neben der Adidas-Aktie alle weiteren Aktien des DAX-Wertes. Sie folgen im Gegensatz zu vielen anderen Aktien dem mathematischen Modell besonders gut. Bei anderen Aktien oder auch anderen Klasseneinteilungen kann die Verteilung der Aktienrenditen stark vom Idealbild abweichen. Schließlich ist die Normalverteilung ein mathematisches Modell. Im Unterricht der 9. Klasse sollte die verbale Beschreibung der Normalverteilung erfolgen, auch wenn eine genauere Behandlung noch nicht möglich ist. Dies stellt dennoch eine gute Grundlage für die exakte Behandlung der Normalverteilung in höheren Klassenstufen dar.

5 Das Binomialmodell

Abschließend lernten die Schüler mit dem Binomialmodell eine Anwendung der beiden Kenngrößen Drift und Volatilität in der Finanzmathematik kennen.

Wie schon beim Vergleich der graphischen Darstellungen und bei der Auswertung der Renditen (Tabelle 3) beobachtet wurde, sind Aktienkurse nicht prognostizierbar. Positive und negative Renditen wechseln sich in unvorhersehbarer Reihenfolge ab. Gleichmaßen wechseln steigende und sinkende Aktienkurse. Mit dem bereits er-

wähnten Binomialmodell lässt sich jedoch ein Rahmen für künftige Kursentwicklungen abstecken. Innerhalb dieses Rahmens sind verschiedene Kursentwicklungen möglich. Dieses soll im Folgenden am Beispiel der Adidas-Aktie erläutert werden.

Im Binomialmodell haben wir das tatsächliche Kursgeschehen wie folgt vereinfacht modelliert:

1. Die betrachtete Zeit wird in Perioden, zum Beispiel in Tage, Wochen oder Monate unterteilt. Der Aktienkurs soll sich nur am Ende einer Periode ändern.
2. Nach jeder Kursänderung kann der Kurs nur jeweils zwei Werte annehmen: Er ist entweder um einen gewissen Faktor u (up) gestiegen oder um einen gewissen Faktor d (down) gesunken. Da die beobachtete Verteilung der Aktienrenditen annähernd symmetrisch ist, steigt bzw. sinkt eine Aktie jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$.

Doch wie groß sollten wir u und d wählen? Diesbezüglich gab uns die Statistik folgende Anhaltspunkte: Der Mittelwert der vergangenen Renditen betrug $m = 0,0044$. Da wir uns auf zwei Werte festlegen müssen, setzen wir eine Standardabweichung als „typische“ Abweichung vom Mittelwert an. Mit unseren Festlegungen lässt sich

nun sagen: Sinkt der Aktienkurs in einer Woche, so beträgt die „typische“ Rendite

$$m - s = 0,0044 - 0,032 = -0,0276.$$

Steigt der Aktienkurs dagegen, dann beträgt die „typische“ Rendite

$$m + s = 0,0044 + 0,032 = 0,0364.$$

Die „typischen“ Renditen liefern uns $u = 1 + m + s$ und $d = 1 + m - s$. Damit können wir nun den Aktienkurs der Adidas-Aktie modellieren. Der Kurs der Aktie am 08.03.2004 betrug €93,40. Sinkt der Aktienkurs in der nächsten Woche, dann wird dieser nach dem Binomialmodell am 15.03.04 „typischerweise“ auf

$$(1 + m - s) \cdot €93,40 = €90,82$$

fallen. Steigt der Aktienkurs hingegen in der nächsten Woche, dann wird er „typischerweise“ einen Aktienkurs von

$$(1 + m + s) \cdot €93,40 = €96,80$$

erreichen. Damit wird die Adidas-Aktie nach dem Binomialmodell mit jeweils einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ am 15.03.2004 die Werte €90,42 oder €96,80 annehmen. Ausgehend von diesen Werten kann für die darauf folgende Woche erneut ein Kursrahmen abgesteckt werden. So können Aktienkursentwicklungen und deren Wahrscheinlichkeiten auch über einen längeren Zeitraum modelliert werden.

Die Abbildung 6 zeigt die möglichen Kursentwicklungen der Adidas-Aktie im Binomialmodell mit drei Perioden von einer Woche. Unsere modellierten Aktienkurse wurden in den darauffolgenden Wochen immer wieder mit den realen Werten verglichen. Der tatsächliche Kurs der Adidas-Aktie lag beispielsweise am 15.03.2004 bei €91,48.

Aktienkurs am			
08.03.	15.03.	22.03.	29.03.
			103,98 €
		100,32 €	
	96,80 €		97,55 €
93,40 €		94,13 €	
	90,82 €		91,53 €
		88,32 €	
			85,88 €

Abbildung 6: Kursentwicklung der Adidas-Aktie im Dreiperioden-Binomialmodell

Die Abweichung des realen Werts von unseren vorhergesagten Werten wurde zum Anlass genommen, über das Binomialmodell zu diskutieren. Beispielsweise wurde bemängelt, dass aus Daten der Vergangenheit Vorhersagen für die Zukunft getroffen werden und unsere Faktoren u und d auch bei längeren Prognosen konstant sind. So fließen neue Daten nicht in die Berechnung ein. Die Schüler kritisierten weiterhin, dass sich Aktienkurse nicht nur am Anfang oder Ende einer Periode, sondern auch dazwischen ändern. Auf unser Beispiel bezogen bedeutet dies, dass sich Aktienkurse nicht nur am Ende einer Woche, sondern auch an den Tagen innerhalb dieser Woche bewegen. Diese Erkenntnis wurde von den Schülern aufgegriffen, die als Verbesserung des Modells die Verkleinerung der Perioden vorschlugen. Anstatt Wochenrenditen und somit entsprechend die Mittelwerte und Standardabweichungen der Wochenrenditen als Grundlage für eine Prognose über eine Woche zu nutzen, kann die Prognose über fünf Börsentage (!) durch Verwenden der Tagesrenditen verbessert werden. Abbildung 7 zeigt die Kursentwicklung der Adidas-Aktie im Binomialmodell mit fünf Perioden von einem Tag. Der Mittelwert und die Standardabweichung der Tagesrenditen der Adidas-Aktie im erwähnten Zeitraum betragen 0,0009 und 0,0079.

Die Verkleinerung der Periodenlänge führte in diesem Fall zu einer Verbesserung der Prognose.

Aktienkurs am					
08.03.	09.03.	10.03.	11.03.	12.03.	15.03.
					97,59€
				96,74€	
			95,89€		96,06€
		95,05€		95,22€	
	94,77€		94,39€		94,56€
93,40€		93,57€		93,73€	
	92,75€		92,92€		93,08€
		92,10€		92,27€	
			91,46€		91,63€
				90,83€	
					90,19€

Abbildung 7: Kursentwicklung der Adidas-Aktie im Fünfperioden-Binomialmodell

Wir liegen mit unseren prognostizierten Werten dichter am realen Aktienkurs vom 15.03.04. Dies wird nicht immer der Fall sein. Es ist daher wichtig, den Schülern bewusst zu machen, dass die

Verkleinerung der Perioden eine Verbesserung des Modells darstellen kann. Eine (theoretische) weitere Verkleinerung der Periodenlänge zu „Stundenrenditen“, „Minutenrenditen“ oder „Sekundenrenditen“ nähert sich dem tatsächlichen Aktiengeschehen immer besser an.

Den Abschluss der Unterrichtseinheit „Statistik der Aktienmärkte“ stellte eine Reflektion des bisher Gelernten dar. Unter dem Titel „Vom Aktienkurs zu künftigen Aktienkursen“ trugen die Schüler zusammen, wie aus vergangenen Aktienkursen ein Kursrahmen für die künftige Aktienkursentwicklung abgesteckt werden kann. Vereinfachend lassen sich folgende Schritte formulieren:

1. Berechnung der Renditen,
2. Berechnung des Mittelwerts und der Standardabweichung der Renditen,
3. Anwenden des Binomialmodells: Bestimmung der Faktoren u und d und der Aktienkurse nach einer Periode.
4. Kritische Auseinandersetzung mit den modellierten Aktienkursen

Die Aufarbeitung der oft umfangreichen Datenmengen für die Schüler erfolgte mit Excel. Für Tabellenkalkulationsprogramme gut nutzbare Aktienkurse sind unter

<http://de.finance.yahoo.com/>

zu finden. Lassen es die technischen Voraussetzungen der Schule und die Kenntnisse der Schüler zu, sollte Excel auch im Unterricht verwendet werden.

6 Resümee

Die vorgestellte Unterrichtseinheit stellt einen ersten Versuch dar, die Beschreibende Statistik anhand der Aktienmärkte anwendungsbezogen einzuführen. Sie wurde wie bereits erwähnt in einem Wahlpflichtkurs Mathematik in einer 9. Klasse an einem Berliner Gymnasium im Rahmen eines Unterrichtsversuches erfolgreich unterrichtet. Die meisten Schüler kannten Aktien aus den Medien, einige wenige hatten bereits an Börsenplanspielen teilgenommen. Dennoch waren die Kenntnisse der Schüler im Bereich der Ökonomie gering. Darüber hinaus waren bedingt durch den Berliner Lehrplan keine Vorkenntnisse aus dem Bereich der Beschreibenden Statistik zu erwarten. Aus diesem Grund musste sich in den 16 zur Verfügung stehenden Unterrichtsstunden auf wesentliche ökonomische und mathematische Inhalte

konzentriert werden. Dies führte zu einem geleiteten Unterricht, in dem dennoch genügend Möglichkeiten für Schüleraktivitäten vorhanden waren. Da es bisher keine herkömmlichen Unterrichtsmaterialien für das Thema „Statistik der Aktienmärkte“ gibt, wurden Arbeitsblätter entwickelt, die einerseits die für das jeweilige Thema relevanten ökonomischen oder mathematischen Informationen bereitstellten und andererseits Übungsaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades enthielten. Ein Großteil dieser Aufgaben wurde von den Schülern in Partnerarbeit oder offener Gruppenarbeit gelöst.

Durch die Verbindung der mathematischen und ökonomischen Inhalte lernten die Schüler die Mathematik von ihrer angewandten Seite kennen, einen Aspekt, den sie sehr schätzten. Dies spiegeln auch die Antworten der Schüler in der Befragung zur dieser Unterrichtseinheit wider:

- „Die Unterrichtseinheit hat mir sehr gut gefallen, weil es einen allgemeinen Einblick in die Börse gegeben hat. Es gab zwar Fälle, die schwer waren, aber diese wurden auch gelöst.“
- „Ich fand den Unterricht sehr gut, da er sehr gut an der Praxis orientiert war.“
- Ich fand den Unterricht gut. Jeder hat eigentlich schon mal was von Aktien gehört, aber das Thema war doch jedem unbekannt. Nun weiß ich mehr.“

Es zeigt sich, dass durch eine sorgfältige Auswahl und altersgemäße Aufbereitung der Unterrichtsinhalte, die Mathematik und Ökonomie der Aktienmärkte bereits Schülern einer 9. Klasse zugänglich gemacht werden können. Das Thema Aktien und die mathematische Modellierung können in ihrer gesamten Komplexität nicht umfassend in der Sekundarstufe I behandelt werden, dennoch ist bereits in dieser Altersstufe ein erster Kontakt mit derartigen Themen möglich. Darauf aufbauend können im Sinne des Brunerschen Spiralprinzips in der Sekundarstufe II weitere ökonomische und mathematische Probleme mit Hinblick auf Aktien tiefergehend behandelt werden. Als Ergänzung bieten sich zum Beispiel die Untersuchung wirtschaftlicher Zusammenhänge verschiedener Aktien, die mit der empirischen Korrelation auch mathematisch erfassbar werden, oder die mathematische Modellierung künftiger Aktienkurse, wie sie etwa in „Finanzmathematik für Einsteiger“ (Adelmeyer/Warmuth) beschrieben werden, an.

Einige Kritiker sind der Meinung, dass Themen rund um die Aktie in der Schule nicht unterrichtet werden sollten, da dieses Thema zu einem noch stärkeren materialistischen Denken, das die heuti-

ge Gesellschaft prägt, führe. Dem ist entgegenzusetzen, dass ein kontrollierter Umgang mit diesem Problem dazu beiträgt, die Schüler zu sensibilisieren und zu einem vernünftigen Umgang mit Finanzprodukten anzuregen. Dazu können auch wir als Mathematiklehrer beitragen.

Literatur

- Adelmeyer, M./Warmuth, E.: *Finanzmathematik für Einsteiger*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2003.
- Beike, R./Schlütz, J.: *Finanznachrichten lesen, verstehen, nutzen*. Schäfer-Poeschel, Stuttgart 2001.
- Herget W./Scholz D.: *Die etwas andere Aufgabe*. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 1998.
- Krämer, W.: *So lügt man mit Statistik*. Piper, München/Zürich 2004.
- Winter, H.: *Geld und Brief – Kursbestimmung an der Aktienbörse*. In: *Mathematik lehren*. 22 (1987), S.8-11.

Anschrift der Verfasserin

Peggy Daume
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
10099 Berlin
daume@mathematik.hu-berlin.de

Gefördert durch das DFG-Forschungszentrum
MATHEON

Ergänzung des Heftherausgebers

Kurzfassungen zu o.a. Literatur aus der Datenbank ZDM/MATHDI

Adelmeyer, M./Warmuth, E.: Finanzmathematik für Einsteiger. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2005 (2., durchges. Aufl.)

Das vorliegende Buch ist als Lehrbuch zwischen gymnasialem Mathematikunterricht und Universität konzipiert. Es führt einfach und verständlich in einige Verfahren der klassischen und modernen Finanzmathematik ein. Der Aufbau ist übersichtlich: Jedes der fünf Kapitel geht jeweils von einem Finanzinstrument (Anleihen, Lebensversicherungen, Aktien, Portfolios bzw. Optionen) aus, bringt reale Daten ein, wirft eine für einen Anleger relevante Frage auf und zeigt, mit welchen mathematischen Konzepten und Methoden diese Frage behandelt werden kann. Zu jedem Kapitel

werden außerdem Aufgaben mit Lösungen angeboten.

Beike, R./Schlütz, J.: Finanznachrichten lesen, verstehen, nutzen. Schäfer-Poeschel, Stuttgart 2005 (4., überarb. Auflage)
s. Bibliographische Rundschau, S.

Herget W./Scholz D.: Die etwas andere Aufgabe. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze 1998

Das Buch enthält über 200 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsvorschlägen und Ergänzungen zu mehr als 130 Zeitungsausschnitten, grob geordnet nach ihren mathematischen Inhalten: Prozentrechnen, Prozente and Promille, große Zahlen, Geld, Einheiten, Geschwindigkeiten, Formeln, Funktionen und graphische Darstellungen, Brüche und Zahlenverhältnisse, Diverses. Anforderungen und Inhalte zu den einzelnen Kapiteln sind im Anhang aufgelistet. Es wurde versucht, zeitlosinteressante Zeitungsausschnitte zu verwenden. Einige ältere Beiträge (z.B. zu Wachstum und Prognosen) bieten jedoch auch die Möglichkeit, aktuelle Entwicklungen mit damaligen Aussagen zu vergleichen. Ein besonderes Gewicht liegt auch auf Zeitungsartikeln, die Fehler enthalten. - Eingeleitet wird das Buch durch Betrachtungen "Zeitungsausschnitte als Beiträge zu einem realitätsorientierten Mathematikunterricht".

Winter, H.: Geld und Brief – Kursbestimmung an der Aktienbörse. In: Mathematik lehren. 22 (1987), S.8-11

Aus dem komplexen Thema Börse wird hier nur eine Fragestellung herausgegriffen: Wie erfolgt (börsentäglich, d.h. von montags bis freitags je von 11.30 bis 13.30 Uhr) die Kursfestsetzung einer Aktie. Der sachkundliche Gehalt dieser Frage ist sicher hoch einzuschätzen, weil der Prozess der Preisbildung aus dem Wechselspiel von Angebot und Nachfrage hier in einer besonders zugespitzten Situation betrachtet werden kann. Der mathematische Gehalt ist zwar aus der Sicht des praktizierenden Kursmaklers eher primitiv (Addieren und Vergleichen), wird aber deutlich erhöht, wenn die Kursfestsetzung in etwas allgemeinerer Form betrachtet wird; und dazu möchte dieser Beitrag Materialien liefern und Aktivitäten (etwa für die Klassen 8/9) benennen.