Die Rolle von Baumdiagrammen bei der Bearbeitung stochastischer Probleme

JUDITH SCHILLING UND KATJA KRÜGER, DARMSTADT

Zusammenfassung: *Baumdiagramme und Pfadregeln sind ein verbindlicher Lerninhalt im schulischen Stochastikunterricht der Sekundarstufen I und II. Im Themenfeld Stochastik finden sich viele spannende Probleme, für deren Lösungsfindung die Nutzung von Baumdiagrammen hilfreich ist. Anhand ausgewählter Beispiele beleuchtet dieser Artikel, wie Baumdiagramme den Prozess des Lösens solcher Probleme unterstützen können. Darüber hinaus wird darauf eingegangen, welches Grundwissen und -können notwendig ist, damit Baumdiagramme flexibel als heuristisches Werkzeug beim Problemlösen eingesetzt werden können.*

1 Einleitung

Da sich dieser Artikel mit dem Lösen stochastischer Probleme befasst, soll zunächst der Frage nachgegangen werden, was eigentlich ein *Problem* kennzeichnet und von einer (Routine-)Aufgabe unterscheidet. Inwiefern handelt es sich zum Beispiel bei den beiden folgenden stochastischen Aufgaben, auf die in diesem Artikel noch eingegangen wird, um Probleme?

> *<u>Mensch ärgere dich nicht:</u> Um beim Spiel „Mensch ärgere dich nicht" das Haus verlassen zu dürfen, muss eine Sechs geworfen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man nach spätestens zwei (drei) Würfen eine Sechs und darf das Haus verlassen?* (abgewandelt nach Krüger et al. 2015, S. 141)

> *<u>Einsen vor der ersten Sechs:</u> Ein fairer Würfel wird so lange geworfen, bis die erste Sechs auftritt. Wie wahrscheinlich ist es, vorher mindestens eine Eins zu werfen?* (Henze et al. 2021, S. 2)

Die erste der beiden Aufgaben wird für Personen mit grundlegenden stochastischen Kenntnissen wohl kein Problem darstellen. Anders sieht es für Schülerinnen und Schüler aus, die gerade erst begonnen haben, sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beschäftigen. Ob es sich um ein Problem handelt, hängt (nicht nur in der Stochastik) vom Vorwissen des bearbeitenden Individuums ab. Probleme sind somit Aufgaben, für deren Lösung eine subjektive Hürde überwunden werden muss, die also subjektiv schwierig sind. Der Prozess, des Überwindens dieser Hürden wird als *Problemlösen* bezeichnet (Bruder et al. 2015, S. 279). Personen, denen das Überwinden von subjektiven Hürden leichter fällt als anderen, verfügen oft über ein hohes Maß an *geistiger Beweglichkeit* (Bruder 2002, S. 32). Sie sind in der Lage, Problemstellungen auf das Wesentliche zu reduzieren, Gedankengänge umzukehren und Abhängigkeiten zwischen den Aspekten eines Problems zu erkennen, indem sie diese gleichzeitig betrachten. Sie können einzelne Aspekte gezielt fokussieren und variieren und Gedankengänge auch gegen Widerstände durchhalten. Darüber hinaus fällt es ihnen leicht, ein Problem aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten oder ein bekanntes Vorgehen auf einen anderen Kontext zu übertragen (Bruder 2002, S. 33). Um auch weniger geistig beweglichen Schülerinnen und Schülern erfolgreiches Problemlösen zu ermöglichen, gibt es verschiedene Ansätze. Einer dieser Ansätze ist die heuristische Schulung, das gezielte Bewusstmachen von geeigneten Problemlösestrategien, den Heurismen (Bruder & Collet 2011, S. 36). Im Unterschied zu einem Algorithmus „ist ein Heurismus eine flexible Herangehensweise, die auf eine Vielzahl von Problemen anwendbar ist, dafür aber nicht unbedingt auch sicher zum Ziel führt." (Holzäpfel et al. 2018, S. 138). Von einer heuristischen Schulung können auch Schülerinnen und Schüler profitieren, denen das Überwinden von subjektiven Hürden von vorneherein leichter fällt, indem sie ihr Vorgehen reflektieren oder elegantere, schnellere Lösungswege finden.

Wenden wir uns nun speziell stochastischen Problemen zu. „Unter einem stochastischen Problem wird […] ein Problem verstanden, bei dessen Formulierung stochastische Elemente auftauchen oder zu dessen Lösung explizit oder implizit stochastische Elemente benötigt werden." (Bea 1995, S. 5). Oftmals geht das Lösen solcher Probleme mit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einher. Zahlreiche stochastische Probleme waren in den vergangenen Jahrzehnten Ausgangspunkt für Artikel in dieser Zeitschrift. Dabei standen häufig elegante Lösungen und Vorschläge für den Einsatz im Unterricht im Fokus. Ein Werkzeug, das beim Lösen stochastischer Probleme hilfreich sein kann, ist das Baumdiagramm. Dieser Artikel nimmt daher eine andere Perspektive ein, indem der gezielte Einsatz von Baumdiagrammen als Werkzeug zum Problemlösen im Inhaltsbereich der Stochastik thematisiert wird. Im Folgenden wird herausgearbeitet, dass durch die Verwendung von Baumdiagrammen zum einen die Bewältigung von Anforderungen an die geistige Beweglichkeit unterstützt werden kann und zum anderen, dass mit deren Hilfe elegantere Lösungswege gefunden werden können. Bevor das Baumdiagramm im Kontext stochastischer Problemaufgaben beleuchtet wird, soll zunächst sein Nutzen im Mathematikunterricht in den Blick genommen werden. Damit soll verdeutlicht werden, welche nützlichen Aspekte das Baumdiagramm als Arbeitsmittel allgemein beinhaltet und inwiefern Schülerinnen und Schüler es bereits im Mathematikunterricht kennenlernen können, bevor es in der Stochastik thematisiert wird.

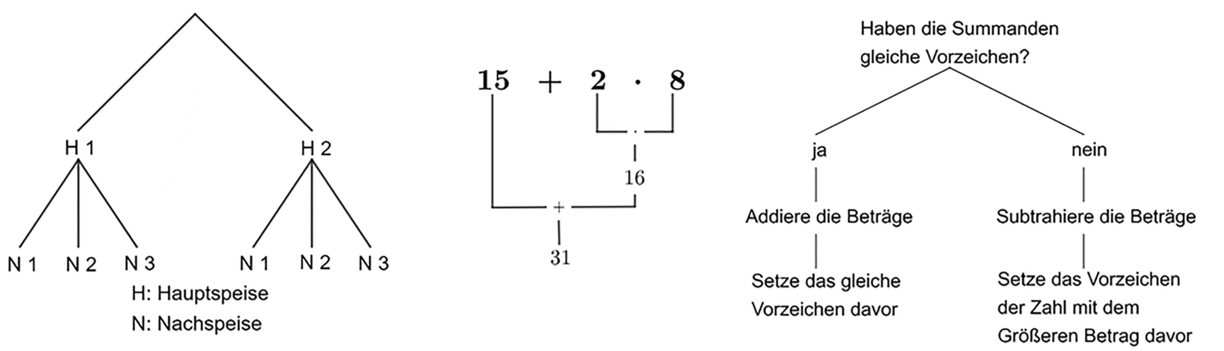
2 Nutzen von Baumdiagrammen

Schon in der Grundschule lernen Schülerinnen und Schüler Probleme im Themenfeld Kombinatorik mithilfe von Baumdiagrammen zu lösen (Sill & Kurtzmann 2019, S. 199). Beispielsweise lässt sich die Frage nach der Anzahl aller möglicher Menüs, die sich aus zwei verschiedenen Hauptspeisen und drei verschiedenen Nachspeisen zusammenstellen lassen mithilfe eines Baumdiagramms wie in Abb. 1 (links) anschaulich durch Abzählen der Pfade lösen. Um diese Frage zu beantworten, müssen Schülerinnen und Schüler alle möglichen nacheinander stattfindenden Handlungen oder Entscheidungen identifizieren, was durchaus eine anspruchsvolle Aufgabe darstellen kann (ebenda). Das Erstellen des Baumdiagramms hilft hier, indem die Abfolge der Handlungen oder Entscheidungen visualisiert wird. Es bietet zum einen eine **übersichtliche Darstellung** der Entscheidungsmöglichkeiten und zum anderen die Möglichkeit das **zeitliche Nacheinander** der getroffenen Entscheidungen nachzuvollziehen.

Auch außerhalb der Kombinatorik werden Baumdiagramme verwendet, um Abläufe von Handlungen oder Entscheidungen darzustellen. Diese können beispielsweise zum Einsatz kommen, um Rechenregeln in den rationalen Zahlen darzustellen (Vollrath & Weigand 2003, S. 59). In Abb. 1 (rechts) wird die Anwendung der Additionsregel veranschaulicht. Mit der **Visualisierung** von Informationen durch ein Baumdiagramm geht deren **Strukturierung** einher. So lässt sich durch die Verwendung von Rechenbäumen zur Veranschaulichung der Vorrangregeln beim Rechnen wie in Abb. 1 (Mitte) sowohl die Struktur des Zahlenterms als auch das zeitliche Nacheinander bei der Berechnung verdeutlichen. Auch im Alltag werden Baumdiagramme zur Strukturierung und Ordnung von Gedanken oder Informationen in Form von Mindmaps oder Stammbäumen verwendet.

Im schulischen Kontext sind diese nützlichen Aspekte von Baumdiagrammen insbesondere bei der Modellierung von stochastischen Sachsituationen durch mehrstufige Zufallsexperimente[1] von Bedeutung. Das Baumdiagramm ermöglicht es dabei, das zeitliche Nacheinander, aber auch parallel bzw. voneinander unabhängig ablaufende Zufallsexperimente, sowie die möglichen Ausgänge der Teilexperimente und deren Wahrscheinlichkeiten auf einen Blick zu betrachten. Eine besondere Bedeutung im Stochastikunterricht haben dabei sogenannte Häufigkeitsbäume, bei denen nicht nur Wahrscheinlichkeiten oder relative Häufigkeiten angegeben werden, sondern auch zu erwartende absolute Häufigkeiten. Diese spielen bei der Analyse von Daten aus Vierfeldertafeln oder bedingten Wahrscheinlichkeiten eine wichtige Rolle (Krüger et. al. 2015, S. 191, Binder et al. 2018).

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die übersichtliche Darstellung und Strukturierung von Informationen in Baumdiagrammen dabei helfen kann, diese auf das Wesentliche zu reduzieren. Der Aspekt der Reduktion beim Erstellen von Baumdiagrammen bietet eine Möglichkeit, die Bewältigung von Anforderungen an die geistige Beweglichkeit zu unterstützen (vgl. Kapitel 1). Wie sich dies in den verschiedenen Phasen von Problemlöseprozessen konkretisieren kann und welche Rolle das Baumdiagramm in diesen Phasen einnimmt, wird im folgenden Kapitel dargestellt.



Entscheidungsbaum in der Kombinatorik | Rechenbaum | Entscheidungsbaum zur Addition

Abb. 1: Baumdiagramme in unterschiedlichem Kontexten

3 Das Baumdiagramm im Problemlöseprozess

Der Prozess des Problemlösens kann in die vier Phasen *Verstehen der Aufgabe*, *Aufstellen eines Plans*, *Durchführen des Plans* und *Rückschau*[2] eingeteilt werden (Pólya, 1949), wobei Pólya mit „Aufgaben“ keine Routineaufgaben, sondern Probleme bezeichnet. Anhand einer Auswahl von stochastischen Problemen wird im Folgenden dargestellt, wie sich Baumdiagramme in diesen Phasen des Problemlöseprozesses als nützliche Werkzeuge erweisen können.

3.1 Verstehen der Aufgabe und Aufstellen eines Plans

Insbesondere in den ersten beiden Phasen eines Problemlöseprozesses kann ein geeignetes Baumdiagramm hilfreich sein. Das Verstehen der Aufgabe markiert den ersten, wichtigen Schritt der Lösungsfindung, in dem es darum geht, sich mit der Aufgabe vertraut zu machen und ein tieferes Verständnis für sie zu entwickeln (Pólya 1949, S. 19f.). Nach Pólya ist aber die „eigentliche Leistung bei der Lösung einer Aufgabe […], die Idee des Plans auszudenken.“ (Pólya 1949, S. 22). Ein Plan ist dann gefunden, „wenn wir wissen oder wenigstens in Umrissen wissen, welche Rechnungen, Umformungen oder Konstruktionen wir ausführen müssen, um die Unbekannte zu erhalten.“ (ebenda). Da diese ersten beiden Phasen oft nicht klar voneinander getrennt werden können, werden sie hier gemeinsam untersucht. Pólya formuliert für diese beiden und auch für die folgenden Phasen Impulse in Form von Fragen, die den Problemlöseprozess in Gang halten sollen. Unter anderem stellt er die Frage „Kannst du eine Figur zeichnen?“ um das Verstehen der Aufgabe zu fördern (Polya 1949, S. 20). Das Baumdiagramm bietet hier eine geeignete Visualisierung.

Als Beispiel betrachten wir das „Tennis Problem“:

> <u>Tennis Problem:</u> *Adam sagt zu seinem Sohn Abel: Du bekommst mehr Taschengeld, wenn Du von 3 Tennisspielen 2 hintereinander gewinnst. Du musst abwechselnd gegen mich und Eva spielen. Er gewinnt eine Partie gegen Adam bzw. Eva mit den Wahrscheinlichkeiten a bzw. e, wobei $a < e$ ist. Wenn er die Wahl hat, soll er Adam-Eva-Adam oder Eva-Adam-Eva spielen?* (Engel 1987, S. 25)

Um dieses Problem mithilfe eines Baumdiagramms zu lösen, muss die Sachsituation zunächst durch ein dreistufiges Zufallsexperiment modelliert werden. Die Modellierung und das Erstellen eines passendenden Baumdiagramms gehen mit dem Verstehen der Aufgabe einher. Eine erste Schwierigkeit besteht hier darin, dass für jede der beiden möglichen Spielreihenfolgen ein eigenes Baumdiagramm erstellt werden muss, in dem jeweils alle möglichen Spielausgänge, also die Abfolge von Siegen und Niederlagen für Abel, abgebildet werden. Die Teilexperimente sind hier also die Spiele, die Abel hintereinander gewinnen oder verlieren kann. Schülerinnen und Schüler könnten stattdessen ein Baumdiagramm zeichnen, das nicht die Abfolge der Spiele, sondern die beiden Spielreihenfolgen abbildet, je nachdem, ob Abel erst gegen Adam oder gegen Eva spielt. Das Mathematisieren der Spielsituation in einem geeigneten stochastischen Modell, hier zwei mehrstufiger Baumdiagramme, das nicht nur den Wechsel der Gegner, sondern auch die Ausgänge der einzelnen Spiele von Abel beinhaltet, stellt eine Hürde dar.

Ein mögliches Baumdiagramm für die Spielreihenfolge Adam-Eva-Adam ist in Abb. 2 zu sehen. Für die Reihenfolge Eva-Adam-Eva kann analog ein Baumdiagramm erstellt werden.

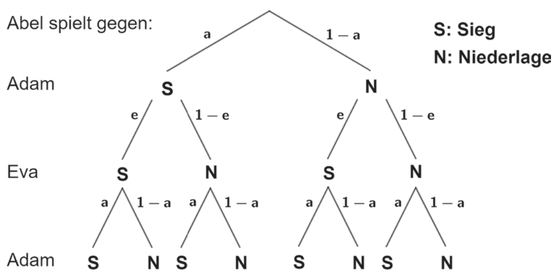


Abb. 2: Vollständiges Baumdiagramm für die Reihenfolge Adam-Eva-Adam.

Die vollständigen Baumdiagramme bieten nun einen Ansatzpunkt zur Reduktion auf die für den weiteren Lösungsprozess wichtigen Informationen. Dafür müssen diejenigen Pfade identifiziert werden, die zu dem Ereignis „Abel gewinnt zweimal hintereinander“ führen. Geübte Problemlöser werden eventuell direkt Baumdiagramme wie in Abb. 3 zeichnen, die auf diese Pfade reduziert sind. Wem das nicht gelingt, dem hilft das vollständige Baumdiagramm dabei die Pfade zu finden, die Abel zu mehr Taschengeld verhelfen. Dabei kann zum einen erkannt werden, dass der Ausgang des dritten Spiels nicht von Bedeutung ist, wenn Abel bereits die ersten beiden Spiele gewonnen hat und zum anderen, dass Abel nach einer Niederlage im ersten Spiel sein Taschengeld nur dann noch aufbessern kann, wenn er anschließend zweimal siegreich ist. Das Baumdiagramm unterstützt diesen Schritt der Reduktion und kann somit helfen, ein tieferes Verständnis für die Aufgabe zu entwickeln. Für das Erstellen eines reduzierten Baumdiagramms muss häufig schon eine erste Idee für einen Plan zur Lösung der Aufgabe vorhanden sein, weil die interessierenden Pfade von diesem abhängen. Wie eingangs erwähnt verdeutlicht dieses Beispiel, dass die ersten beiden Phasen des Problemlösens nicht klar voneinander zu trennen sind.

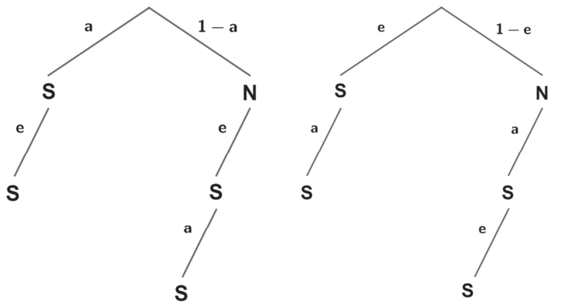


Abb. 3: Links Baumdiagramm für die Reihenfolge Adam-Eva-Adam, rechts für Eva-Adam-Eva

In diesem Problem ist der Plan durch das Erstellen der (reduzierten) Baumdiagramme allerdings noch nicht fertig aufgestellt. Es muss nun überlegt werden, wie Abel mithilfe der gegebenen Informationen die für ihn vorteilhafte Spielreihenfolge herausfinden kann. Dabei helfen die Pfadregeln bei der Berechnung der von a und e abhängigen Wahrscheinlichkeiten für den Doppelsieg von Abel in den beiden Spielreihenfolgen

$a \cdot e + (1 - a) \cdot e \cdot a$ für Adam-Eva-Adam und

$e \cdot a + (1 - e) \cdot a \cdot e$ für Eva-Adam-Eva,

die anschließend verglichen werden müssen. Das Ergebnis liegt hier bereits fast auf der Hand, wenn mithilfe der Pfadregeln die beiden Gewinnwahrscheinlichkeiten gefunden wurden. Etwas anders ist es in folgendem, aus dem LEMAMOP Material (Bruder et al. 2018) für die Jahrgangsstufe 11 entnommenen stochastischen Problem, in dem das Aufstellen eines Plans weitere Schritte erfordert, die unabhängig vom Baumdiagramm erfolgen.

Problem der verbogenen Münzen: *Zwei verbogene Münzen, deren Seiten mit „0“ und „1“ beschriftet sind, werden geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer „0“ bei Münze 1 sei p, bei der zweiten Münze heiße sie q. Es soll die Summe der beiden geworfenen Zahlen gebildet werden.*

Untersuchen Sie, ob es Werte für p und q gibt, so dass das Auftreten der Summen 0, 1 und 2 gleichwahrscheinlich ist.

Auch hier muss die Sachsituation zunächst durch ein zweistufiges Zufallsexperiment modelliert werden, bevor ein Baumdiagramm erstellt werden kann. In Abb. 4 ist zu sehen, wie sich die beiden Münzwürfe und deren Wahrscheinlichkeiten übersichtlich darstellen lassen.

Das Baumdiagramm unterstützt hier ähnlich wie im „Tennis Problem“, indem die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „Summe ist 0“, „Summe ist 1“ und „Summe ist 2“ in Abhängigkeit von p und q mithilfe der Pfadregeln bestimmt werden können:

$P(\text{„Summe ist 0“}) = p \cdot q$

$P(\text{„Summe ist 1“}) = p \cdot (1 - q) + (1 - p) \cdot q$

$P(\text{„Summe ist 2“}) = (1 - p) \cdot (1 - q)$

Anders als im „Tennis Problem“ umfasst ein Plan hier aber noch weitere Schritte, die unabhängig vom Baumdiagramm erfolgen, nämlich das Gleichsetzen dieser Wahrscheinlichkeiten und eine Begründung dafür, dass es nicht möglich ist, passende Werte für p und q zu finden.

Diese beiden Beispiele verdeutlichen, wie das Baumdiagramm die ersten beiden Phasen des Problemlösens unterstützen kann. Dabei kommt den Pfadregeln eine besondere Bedeutung zu, da sie genutzt werden können, um Gleichungen aufzustellen die im weiteren Lösungsprozess benötigt werden. Die Pfadregeln können bei der Lösung vieler stochastischer Probleme zum Einsatz kommen, in denen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden müssen.

Baumdiagramme können darüber hinaus auch den Lösungsprozess von (schwierigeren) Problemen unterstützen, die auf den ersten Blick nur mit vertieften Mathematikkenntnissen zu bewältigen sind, indem sie eine Brücke zur Arbeit mit weiteren Heurismen bilden. Dies soll anhand der anfangs angesprochenen Aufgabe „Einsen vor der ersten Sechs“ beleuchtet werden, bevor die Rolle von Baumdiagrammen in den letzten beiden Phasen des Problemlösens untersucht wird.

3.2 Das Baumdiagramm als Brücke zur Arbeit mit Heurismen

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Aufgaben, hat ein passendes Baumdiagramm für das Problem

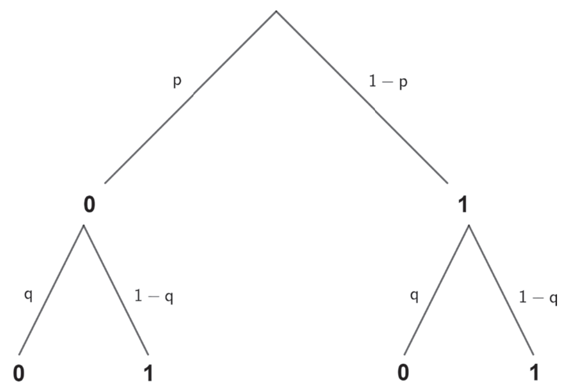


Abb. 4: Baumdiagramm zum „Problem der verbogenen Münzen“

„Einsen vor der ersten Sechs“ (vgl. Kapitel 1) eine unendliche Anzahl an Stufen. Weil das Zufallsexperiment endet, sobald entweder eine Eins oder eine Sechs geworfen wurde, hat ein mögliches Baumdiagramm, das in jeder Stufe bereits auf die relevanten Pfade reduziert ist, die in Abb. 5 gezeigte Form. Die für das Ereignis A = „mind. eine Eins vor der ersten Sechs“ günstigen Ergebnisse sind markiert.

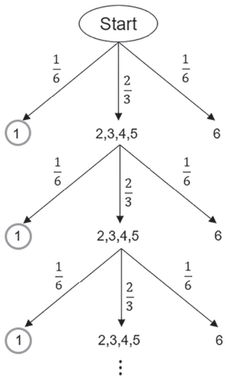


Abb. 5: Baumdiagramm zu „Einsen vor der ersten Sechs“

Hat man ein Baumdiagramm gefunden und damit ein Verständnis für die Aufgabe entwickelt, muss ein Plan ausgedacht werden: Alle für das Ereignis A günstigen Pfade enden mit einer Eins. Im Baumdiagramm lassen sich die entsprechenden Pfadwahrscheinlichkeiten für die gezeichneten Stufen ablesen, wodurch sich ein Muster erkennen lässt und die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der Additionsregel und dem Reihenwert der geometrischen Reihe berechnet werden kann[3]:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{2}$$

Im schulischen Stochastikunterricht kann Wissen über die geometrische Reihe im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden. Das Lösen dieses Problems ist trotzdem auf alternative Arten möglich. Grundlegend für die folgenden Überlegungen ist es zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit eine Eins vor der ersten Sechs zu werfen *unter der Bedingung*, dass im ersten Wurf eine der Zahlen 2 bis 5 geworfen wurde, *genauso groß* ist, wie zu Beginn des Würfelns. Hat man im ersten Wurf keine Eins und keine Sechs geworfen, hat man nichts weiter als Zeit verschwendet. Die Situation ist die Gleiche, wie zu Beginn des Experiments, bei der Wahrscheinlichkeit für A handelt es sich also um eine ***Invariante***. Schülerinnen und Schülern können die Invarianz der Wahrscheinlichkeit für A in den einzelnen Stufen des Zufallsexperiments direkt am Baumdiagramm entdecken. Wird die erste Stufe gedanklich abgeschnitten, so sieht das Baumdiagramm noch genauso aus wie vorher, da es unendlich weitergeht. In Abb. 6 wird dieser Zusammenhang durch den grau markierten Bereich verdeutlicht.

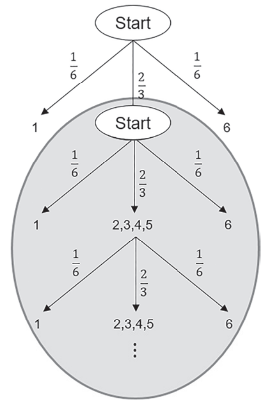


Abb. 6: Visualisierung der Invarianz von $P(A)$

Die Wahrscheinlichkeit für A setzt sich also zusammen aus den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}$, im ersten Wurf eine Eins zu werfen und $\frac{2}{3} \cdot P(A)$, im ersten Wurf keine Eins und auch keine Sechs zu werfen und dann in einem der späteren Würfe eine Eins vor der ersten Sechs zu werfen. Zusammengefasst führt das zu:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot P(A)$$

Auflösen nach $P(A)$ liefert wieder den Wert $\frac{1}{2}$. Das Baumdiagramm unterstützt hier dabei zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung, dass im ersten Wurf weder eine 1 noch eine 6 geworfen wurde, invariant ist[4].

Eine weitere Möglichkeit, einen Plan zu finden, die durch das Baumdiagramm motiviert werden kann, beruht darauf, dass dieses eine gewisse ***Symmetrie*** aufweist. Das Zufallsexperiment endet entweder mit einer Eins oder mit einer Sechs. Betrachtet man das Baumdiagramm in Abb. 5, so ist eine Symmetrie zwischen diesen beiden Ausgängen zu erkennen. Wird eine der Zahlen 2 bis 5 geworfen, so ist das, wie bereits beschrieben, nur Zeitverschwendung. Um das Experiment zu verkürzen könnte man auch die Zahlen 1 und 6 auf die Seiten einer fairen Münze schreiben und diese einmal werfen. Die Wahrscheinlichkeit für A, also dafür, eine 1 zu werfen, ist dann aus Symmetriegründen $\frac{1}{2}$.

Baumdiagramme können also nicht nur durch Anwendung der Pfadregeln den Problemlöseprozess unterstützen. Sie können auch helfen, ein Problem aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten, indem Symmetrien oder Invarianten gefunden beziehungsweise konstruiert werden und damit ein Plan zum Lösen der Aufgabe aufgestellt wird[5]. Somit bieten sie einen Ansatzpunkt, die Bewältigung von Anforderungen an die geistige Beweglichkeit zu unterstützen. In Kapitel 4 werden Symmetrie- und Invarianzüberlegungen aufgegriffen und als Heurismen näher beleuchtet.

3.3 Ausführen des Plans und Rückschau

Ist der Plan ausgedacht, muss er ausgeführt werden. Rott (2013, S. 79) schreibt, dass diese Phase frei von heuristischen Elementen ist. Dem Baumdiagramm kommt aber dennoch häufig eine tragende Rolle zu, da die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mithilfe der damit verbundenen Pfadregeln berechnet werden können. Die Pfadmultiplikationsregel und -additionsregel bieten eine Grundlage zum Lösen vieler stochastischer Probleme, da sie Verfahren liefern, mit denen sowohl Wahrscheinlichkeiten von zusammengesetzten Ergebnissen als auch von Ereignissen berechnet werden können. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Teilexperimente stochastisch unabhängig sind oder nicht. Darüber hinaus bietet das Baumdiagramm eine übersichtliche Dokumentationsgrundlage, da fehlende Wahrscheinlichkeiten an passenden Stellen notiert werden können. So können beispielsweise Wahrscheinlichkeiten von zusammengesetzten Ereignissen, die mit der Pfadmultiplikationsregel berechnet wurden, an die Enden der Pfade geschrieben werden, bevor die Pfadadditionsregel angewendet wird.

Auch in der letzten Phase, der *Rückschau*, die von Pólya wie folgt charakterisiert wird, kann ein Baumdiagramm nützlich sein.

> *„Durch Rückschau auf die vollendete Lösung, durch nochmaliges Erwägen und Überprüfen des Resultats und des Weges, der dazu führte, können [Schülerinnen und Schüler] ihr Wissen festigen und ihre Fähigkeiten, Aufgaben zu lösen, entwickeln.“* (Polya 1949, S. 28)

Das Baumdiagramm ermöglicht es, das Zufallsexperiment, welches die Sachsituation modelliert, zu überblicken und so eventuell weitere, alternative Lösungsansätze zu entdecken (vgl. Kapitel 3.2). Außerdem kann das vorliegende Problem mithilfe des Baumdiagramms mit früher bearbeiteten analogen Aufgaben in Verbindung gebracht werden. Betrachtet man die zum „Tennis-Problem“ und dem „Problem der verbogenen Münze“ erstellten Baumdiagramme in Abb. 3 und Abb. 4, so fällt auf, dass sich diese ähneln. Da die Gewinnwahrscheinlichkeiten a bzw. e von Abel jeweils fest sind, könnte er auch abwechselnd zwei verbogene Münzen werfen, die auf einer Seite mit „Sieg“ und auf der anderen mit „Niederlage“ gekennzeichnet sind. Durch Ähnlichkeiten in Baumdiagrammen können Schülerinnen und Schüler also Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Modellierungen verschiedener stochastischer Situationen finden.

Wie in diesem Kapitel beschrieben, nimmt das Baumdiagramm in den vier Phasen des Problemlösens unterschiedliche Rollen ein. Dabei treten Aspekte verschiedener Heurismen in Erscheinung die im nächsten Kapitel näher betrachtet, ergänzt und mit den in der Literatur beschriebenen Heurismen[6] in Verbindung gebracht werden.

4 Das Baumdiagramm als heuristisches Werkzeug

Beim Verstehen der Aufgabe nimmt das Baumdiagramm zunächst die Rolle einer ***informativen Figur*** ein, die zu den heuristischen Hilfsmitteln gezählt wird. Eine informative Figur ist allgemein eine sinnvolle und reichhaltige Skizze, in der Beziehungen und Informationen, die durch den Aufgabentext gegeben sind, strukturiert und übersichtlich dargestellt werden (Bruder & Collet 2011, S. 46–56). Das Baumdiagramm nimmt „bei der Erfassung mehrstufiger Vorgänge in der Stochastik eine analoge Funktion im Modellierungsprozess wie die Planfigur in geometrischen Anwendungsaufgaben ein“ (Krüger et al. 2015, S. 131). Im „Problem der verbogenen Münzen“ und dem „Tennis Problem“ unterstützt das Baumdiagramm als informative Figur das Aufstellen von ***Gleichungen***, die mithilfe der Pfadregeln ermittelt und im weiteren Bearbeitungsprozess verwendet werden können. Wie anhand des Beispiels „Einsen vor der ersten Sechs“ verdeutlicht wurde, können Baumdiagramme als informative Figuren auch helfen, ***Invarianten*** oder ***Symmetrien*** zu finden und bilden somit eine Brücke zur Arbeit mit Heurismen, die zum Aufstellen eines Plans beitragen können. Invarianten sind dabei Größen, die sich nicht ändern. Der Begriff Symmetrie ist hier weiter zu fassen, als nur geometrische Symmetrien von Zufallsgeräten, wie sie beim Würfel oder bei der Münze in idealisierter Form auftreten. Im Beispiel „Einsen vor der ersten Sechs“ ist die Symmetrie des Würfels zwar grundlegend für den letzten vorgestellten Lösungsweg, da die Eins und die Sechs wegen dieser Eigenschaft als gleichwahrscheinlich angenommen werden können. Für die Entwicklung des Plans ist die Symmetrie des Würfels allerdings nicht ausreichend. Erst die Einsicht, dass die *Ereignisse* „das Zufallsexperiment endet mit einer Eins“ und „das Zufallsexperiment endet mit einer Sechs“ gleichberechtigt sind, oder anders ausgedrückt, dass mit dieser Einsicht eine gewisse Symmetrie in diesem Zufallsexperiment gefunden werden kann, führt hier zum Ziel. Das Baumdiagramm bietet als informative Figur also einen Ausgangspunkt dafür, ein Problem aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten, indem es hilft Strukturen zu finden, die dem Zufallsexperiment zugrunde gelegt werden können. Oft ist es nützlich, vorher auf die für die Problemstellung relevanten Pfade zu reduzieren. In dem folgenden klassischen Problem aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung genügt eine Reduktion alleine jedoch nicht, um eine Lösung zu finden.

> *Das Geburtstagsproblem: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von s Personen mindestens zwei Personen denselben Geburtstag haben?* (vgl. z. B. Engel 1987, S. 39)

Ein vollständiges Baumdiagramm, das alle möglichen Geburtstagskombinationen abbildet, bestünde in dieser Situation aus s Stufen. In der s-ten Stufe wären 365^s Pfade zu zeichnen. Die relevanten Pfade lassen sich hier nicht geschickt zusammenfassen, sodass die gesuchte Wahrscheinlichkeit anschließend mit wenig Aufwand berechnet werden kann. Anders sieht es aus, wenn das ***Gegenereignis*** „alle Personen haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag" betrachtet wird. In diesem Fall können, wie in Abb. 7 in jeder Stufe alle Tage zusammengefasst werden, die noch nicht belegt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis lässt sich dann leicht mit der Pfadmultiplikationsregel berechnen.

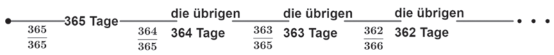


Abb. 7: Baumdiagramm zum Geburtstagsproblem

Anschließend muss die gesuchte Wahrscheinlichkeit durch Subtraktion der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses von Eins berechnet werden. Neben der Reduktion kann es für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten am Baumdiagramm also auch vorteilhaft sein, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu untersuchen. Dabei wird ausgenutzt, dass sich die Wahrscheinlichkeiten von Ereignis und Gegenereignis zu Eins summieren. Das ***Zerlegen*** der Gesamtwahrscheinlichkeit von Eins ist nicht nur im Zusammenhang mit der Gegenwahrscheinlichkeit ein nützliches heuristisches Prinzip. Allgemein versteht man unter diesem Prinzip das Zerlegen eines komplexen Problems in Teilprobleme, die leichter zu überblicken sind (Bruder & Collet 2011, S. 193). Ein Spezialfall stellt die ***Fallunterscheidung*** dar, bei der es sich um eine vollständige Zerlegung handelt. Das Zerlegungsprinzip findet im Zusammenhang mit mehrstufigen Zufallsexperimenten auf zwei Arten Anwendung. Für das Erstellen eines Baumdiagramms muss das mehrstufige Zufallsexperiment zunächst in seine nacheinander ablaufenden Teilexperimente zerlegt werden, die sich in einem Baumdiagramm übersichtlich darstellen lassen. Eine weitere Zerlegung erfolgt, wenn die Ergebnismenge in jeder Stufe angegeben wird. Am einfachsten stellt sich eine Zerlegung in alle möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments dar, womit eine vollständige Fallunterscheidung gemacht wird. Oft ist es aber auch hilfreich, Ergebnisse zusammenzufassen beziehungsweise die Ergebnismenge direkt in disjunkte Ereignisse zu zerlegen und damit eine Reduktion durchzuführen. So können interessierende Wahrscheinlichkeiten schneller berechnet oder Symmetrien erkannt werden. Im Problem „Einsen vor der ersten Sechs" ist es beispielsweise geschickt, in jeder Stufe die Ergebnisse 2 bis 5 zusammen zu fassen, da so die Symmetrie zwischen Eins und Sechs erkannt werden kann.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Baumdiagramm als nützliches Werkzeug beim Lösen stochastischer Probleme dienen kann. Schülerinnen und Schüler lernen es als Arbeitsmittel im Stochastikunterricht im Kontext mehrstufiger Zufallsexperimente kennen. Es muss somit nicht speziell für das Problemlösen erarbeitet werden. Welches Grundwissen und -können (Bruder et al. 2016, S. 56) im Zusammenhang mit Baumdiagrammen unverzichtbar ist, damit es flexibel als heuristisches Werkzeug eingesetzt werden kann, wird im folgenden Kapitel dargelegt.

5 Grundwissen und -können für den Einsatz von Baumdiagrammen als heuristisches Werkzeug

In Kapitel 3 wurde anhand zweier Beispiele erläutert, dass das Modellieren stochastischer Situationen durch ein Baumdiagramm und damit als mehrstufiges Zufallsexperiment ein wichtiger Bestandteil des Verstehens stochastischer Problemstellungen ist. Damit Schülerinnen und Schüler lernen, diesen Schritt bewusst durchzuführen, sollte im Unterricht zunächst die Darstellung eines mehrstufigen Zufallsexperiments durch ein Baumdiagramm thematisiert werden:

> *„[Dies] stellt für Schüler eine durchaus herausfordernde Aufgabe dar, deren Schwierigkeiten Lehrende nicht unterschätzen dürfen. Daher sollten sie mit ihren Schülern die einzelnen Schritte dieses Modellierungsprozesses an ausgewählten Beispielen thematisieren, ohne diesen gleich durch Wahrscheinlichkeitsangaben zu erschweren. Damit wird der Fokus nicht auf das Berechnen, sondern zuerst auf das Mathematisieren der vorliegenden stochastischen Situation gelegt."* (Krüger et al. 2015, S. 131)

Diese Phase der Modellierung kann durch die Fragen „Was läuft nacheinander ab?", „Wofür kann ich mich entscheiden?" oder „Welche möglichen Ergebnisse haben die Teilexperimente?" (ebenda) unterstützt werden. Diese Fragen können Schülerinnen und Schülern helfen einen Ansatz für die Modellierung zu finden, indem sie dazu anregen, das Zufallsexperiment in geeignete Teilexperimente bzw. Stufen und die möglichen Ergebnisse zu *zerlegen*. Die Pfadregeln kommen zum Einsatz, sobald der Übergang vom realen Sachverhalt in die Modellebene vollzogen wurde, wenn also sowohl die zusammengesetzten Ergebnisse an den Enden der Pfade als auch die Wahrscheinlichkeiten an den entsprechenden Pfaden notiert wurden (Krüger et al. 2015, S. 135). Die Aufgabe muss vor deren Anwendung somit bereits verstanden und ein passendes Baumdiagramm gefunden worden sein. Die Pfadregeln können, wie in Kapitel 3 beschrieben, sowohl beim Aufstellen, als auch beim Durchführen eines Plans nützlich sein.

Um einen flexiblen Einsatz von Baumdiagrammen zu ermöglichen ist es nützlich, diese in unterschiedlichen stochastischen Situationen zu thematisieren und auch Zufallsexperimente mit mehr als zwei Stufen zu untersuchen. An dem zu Beginn dieses Artikels genannten Beispiel „Mensch ärgere dich nicht" (vgl. Kapitel 1) können Teile notwendigen Grundwissens zum Einsatz von Baumdiagramm als Werkzeug zum Problemlösen behandelt werden: Auch wenn es im Fall von zwei Würfen noch möglich ist, ein Baumdiagramm zu zeichnen, das in beiden Stufen alle möglichen Ergebnisse abbildet (und das damit $6 \cdot 6 = 36$ Pfade umfasst), kann aufgrund der Mühseligkeit dieses Vorgehens und des Umfang des resultierenden Baumes deutlich gemacht werden, dass es übersichtlicher sein kann, nur Teile des Baums zu untersuchen oder Ergebnisse zusammenzufassen. Die *Reduktion* lässt sich an diesem Beispiel also gut thematisieren. Besonders übersichtlich ist ein Baumdiagramm wie in Abb. 8, in dem nur zwischen den Ereignissen „Sechs" und „keine Sechs" unterschieden wird.

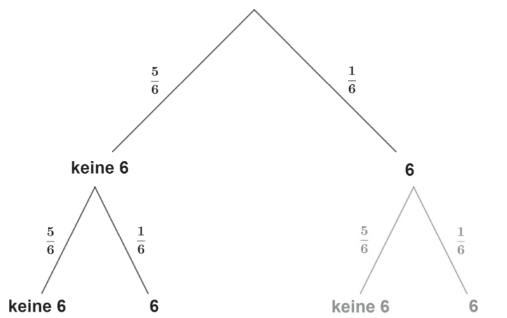


Abb. 8: Reduziertes zweistufiges Baumdiagramm zum Spiel „Mensch ärgere dich nicht"

Wie im „Tennis Problem" ist auch hier eine weitere Reduktion möglich, indem auf die grau gefärbten Pfade verzichtet wird. Wurde bereits im ersten Wurf eine Sechs geworfen, so handelt es sich, unabhängig vom Ausgang des zweiten Wurfs, um ein günstiges Ergebnis. Die Nützlichkeit der Reduktion wird noch deutlicher, wenn Zufallsexperimente mit mehr als zwei Stufen untersucht werden. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, spätestens im dritten Wurf eine Sechs zu werfen, wäre ein vollständiges Baumdiagramm unübersichtlich und aufwendig zu erstellen (hier wären $6^3 = 216$ Pfade zu zeichnen).

Auch die Strategie, das *Gegenereignis* zu untersuchen und damit einen anderen Blickwinkel einzunehmen kann an diesem Beispiel motiviert werden. Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, in drei Würfen mindestens eine Sechs zu werfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis „keine Sechs in drei Würfen" schnell durch $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ berechnet und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich durch Subtraktion dieses Wertes von Eins.

Beide Beispiele beinhalten den Wurf eines Würfels. Neben dem fairen Würfel sind für den Stochastikunterricht auch die ideale Münze, das Glücksrad und das Ziehen von Kugeln aus einer Urne von Bedeutung. Diese Zufallsgeräte eignen sich in ihrer idealisierten Form, um sehr viele stochastische Situationen zu modellieren und sollten deswegen im Unterricht thematisiert werden. Dabei kann auch darauf eingegangen werden, dass es durchaus möglich ist, eine Sachsituation durch verschiedene Modelle zu beschreiben, da die Modelle sich ineinander überführen lassen: Betrachten wir noch einmal das Spiel „Mensch ärgere dich nicht". Statt dreimal zu würfeln könnte man auch dreimal aus einer Urne mit einer roten und fünf schwarzen Kugeln mit Zurücklegen ziehen und die Wahrscheinlichkeit berechnen, mindestens eine rote Kugel zu ziehen. Die Baumdiagramme wären (bis auf die Bezeichnungen der Ereignisse) dieselben. Im Zusammenhang der Urnenziehungen sollte auch das Ziehen mit und ohne Zurücklegen unterschieden werden. Die Kenntnis verschiedener Modelle hilft das für eine Sachsituation passende zu finden. Dabei ist es wichtig, dass Schülerinnen und Schüler zwischen einer Sachsituation und einem stochastischen Modell unterscheiden lernen. Um zu verhindern, dass Baumdiagramme und die damit verbundene Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ausschließlich mit Laplace-Modellen verbunden werden, sollten auch reale Sachverhalte untersucht werden, in denen Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten oder aus Erfahrungen geschätzt werden (Krüger et al. 2015, S. 146).

Auch wenn die hier aufgeführten Elemente eines Grundwissens und -könnens kleinschrittig erscheinen mögen, ist es wichtig, dass mehrstufige Zufallsexperimente und deren Visualisierung im Baumdiagramm mit Sorgfalt unterrichtet werden. Aus der Mathematikdidaktik weiß man im Zusammenhang mit anderen Visualisierungen, dass es richtig ist, „wenn Veranschaulichungen auch als Lernstoff angesehen werden und nicht als Bildmaterial, das den Kindern gleichsam von Haus aus voll vertraut ist“ (Winter 2016, S. 191). Selbst wenn Schülerinnen und Schüler Baumdiagramme eventuell schon in einem anderen Kontext, wie der Kombinatorik in der Grundschule, kennen gelernt haben, sollte also trotzdem keine Selbstevidenz unterstellt werden. Die immer wiederkehrende Verwendung von Baumdiagrammen als Mittel zur Visualisierung mehrstufiger Zufallsexperimente hilft, dass diese langfristig „mehr Lernhilfe als Lernstoff sind“ (Dreher & Holzäpfel 2021, S. 6).

Nachdem Baumdiagramme im Kontext mehrstufiger Zufallsexperimente eingeführt wurden, können sie anschließend immer wieder in verschiedenen Themenbereichen eingesetzt und weiterentwickelt werden. Dies ist wichtig zum Wachhalten des bisher erworbenen Grundwissens und -könnens. Ihr erneutes Aufgreifen ist beispielsweise bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten zu empfehlen. In diesem Zusammenhang sollten Häufigkeitsdoppelbäume genutzt werden (Binder et al. 2018). Diese enthalten neben den Wahrscheinlichkeiten auch die erwarteten Häufigkeiten einer fiktiven Populationsgröße, wodurch eine inhaltliche Deutung sowie ein besseres Verständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten ermöglicht werden kann. Für die spezielle Problemklasse der bedingten Wahrscheinlichkeiten werden in der Literatur häufig alternative Visualisierungen empfohlen[7]. Besonders herausgehoben wird dabei das Einheitsquadrat, da gesuchte Wahrscheinlichkeiten in diesem dynamisch betrachtet werden können. Baumdiagramme bieten jedoch gegenüber alternativen Visualisierungen den Vorteil, dass sie bereits von der Modellierung mehrstufiger Zufallsexperimente bekannt sind (Krüger et al. 2015, S. 191).

6 Fazit

Das Baumdiagramm ist ein universelles Arbeitsmittel, das zum Einsatz kommt, wenn mehrstufige Zufallsexperimente untersucht werden. Es vereint Aspekte verschiedener Heurismen und kann so als Werkzeug in Schülerhand Bearbeitungsprozesse stochastischer Probleme auf vielfältige Weise unterstützen. Dabei bietet die Arbeit mit Baumdiagrammen viele Vorteile (auch gegenüber anderen Visualisierungen). Sie lassen sich leicht skizzieren und sind somit ad hoc einsetzbar. Außerdem können sie auf die für die Lösung der Aufgabe relevanten Elemente reduziert werden und sind somit äußerst übersichtlich. Wurde die durch eine Problemstellung gegebene Sachsituation durch ein Baumdiagramm modelliert, können verschiedene Aspekte des Problems gleichzeitig erfasst, wahlweise fokussiert aber auch miteinander verknüpft werden. Weiter bieten die eng mit dem Baumdiagramm verbundenen Pfadregeln ein Verfahren zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass auf verschiedene Kontexte übertragen werden kann und somit vielfältig einsetzbar ist. Zusammenfassend kann konstatiert werden, dass durch den Einsatz von Baumdiagrammen als heuristisches Werkzeug nicht nur die Bewältigung von Anforderungen an die geistige Beweglichkeit unterstützt werden kann, sondern auch Wege zu heuristischen Prinzipien eröffnet werden. So erlaubt es, wie im Problem „Einsen vor der ersten Sechs“, Strukturen zu finden, die dem Zufallsexperiment zugrunde liegen und mit deren Hilfe auch schwierigere stochastische Probleme elegant zu lösen.

Danksagung: Wir danken den Gutachtern für die hilfreichen konstruktiven Hinweise und Kommentare.

Anmerkungen

1 Der Begriff „Zufallsexperiment“ wird von einigen Autoren kontrovers diskutiert (Sill 2010, S. 2–4). Da er aber im schulischen Stochastikunterricht sehr verbreitet ist, wird er auch in diesem Beitrag verwendet.

2 Pólya setzt mit seinen Werken Anfang des 20. Jahrhunderts einen Meilenstein in der Problemlöseforschung. „So gut wie alle nachfolgenden mathematischen und mathematikdidaktischen Werke zum Problemlösen […] beziehen sich explizit auf Pólyas Werke zum Problemlösen.“ (Rott 2013, S. 45).

3 Für Varianten dieser Aufgabe und einen weiteren Lösungsweg auf Universitätsniveau siehe Henze (2019).

4 Formal liegt dieser Begründung die folgende Rechnung zugrunde: Die Menge aller möglichen Ergebnisse wird danach *zerlegt*, wie der erste Wurf ausgeht, wobei zwischen den Ausgängen 1, 6 und „weder 1 noch 6“ unterschieden wird. Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit gilt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} \cdot P(A|\text{„1 im 1. Wurf“}) \\ &\quad + \frac{1}{6} \cdot P(A|\text{„6 im 1. Wurf“}) \\ &\quad + \frac{4}{6} \cdot P(A|\text{„weder 1 noch 6 im 1. Wurf“}). \end{aligned}$$

Wegen $P(A|\text{„1 im 1. Wurf“}) = 1$ und $P(A|\text{„6 im 1. Wurf“}) = 0$ kann diese Wahrscheinlichkeit einfacher geschrieben werden:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot P(A|\text{„weder 1 noch 6 im 1. Wurf“})$$

Weil die Wahrscheinlichkeit eine Eins vor der ersten Sechs zu werfen unter der Bedingung, dass im ersten Wurf eine der Zahlen 2 bis 5 geworfen wurde, genauso groß ist, wie zu Beginn des Experiments gilt

$P(A|„\text{weder 1 noch 6 im 1. Wurf}“) = P(A)$.

Zusammengefasst führt das zu:

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot P(A)$.

Auflösen nach $P(A)$ liefert den Wert $\frac{1}{2}$.

5 Weitere Probleme (inklusive Vorschläge für den Einsatz im Unterricht), die mithilfe von Invarianz- oder Symmetrieüberlegungen gelöst und durch Baumdiagramme unterstützt werden können, finden sich in Henze et al. (2021).

6 In der Literatur werden verschiedene Kategorisierungen für Problemlösestrategien vorgeschlagen. Hier wird die von Bruder und Collet (2011, S. 36) beschriebene Einteilung in heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zugrunde gelegt, da es sich bei dieser um „[d]as (vermutlich) bekannteste Klassifikationssystem“ handelt (Rott 2013, S. 82).

7 Mögliche Alternativen sind Doppelbäume, Vierfeldertafeln, Venn-Diagramme, Einheitskreis, Einheitsquadrate oder das Häufigkeitsnetz (Bea & Scholz 1995; Binder et al. 2021; Böcherer-Linder & Sturm 2021).

Literatur

Bea, W. (1995). Stochastisches Denken: Analysen aus kognitionspsychologischer und didaktischer Perspektive. Frankfurt: Lang.

Bea, W. & Scholz, R. W. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16(3–4), 299–327.

Binder, K., Krauss, S. & Wassner, C. (2018). Der Häufigkeitsdoppelbaum als didaktisch hilfreiches Werkzeug – von der Unterstufe bis zum Abitur. *Stochastik in der Schule*, 38(1), 2–11.

Binder, K., Steib, N. & Krauss, S. (2021). Das Häufigkeitsnetz: Alle Wahrscheinlichkeiten auf einen Blick erfassen. *mathematik lehren* (224), 32–36.

Böcherer-Linder, K. & Sturm, A. (2021). Mit Einheitsquadraten statistisches Verständnis fördern: Wie gut sind Antikörpertests? *mathematik lehren* (224), 28–31.

Bruder, R. (2002). Lernen, geeignete Fragen zu stellen: Heuristik im Mathematikunterricht. *mathematik lehren* (115), 4–8.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R., Grave, B., Krüger, U.-H. & Meyer, D. (2018). LEMAMOP–Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen. Lehrermaterial Konzeption des Trainings. Braunschweig: Westermann.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer.

Bruder, R., Leuders, T. & Büchter, A. (2012). Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten (5. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Dreher, A. (2014). Baumdiagramme und der Rest der Welt. In Sproesser, U., Wessolowski, S. & Wörn, C. (Hrsg.), Daten, Zufall und der Rest der Welt: Didaktische Perspektiven zur anwendungsbezogenen Mathematik (S. 55–69). Berlin, Heidelberg: Springer.

Dreher, A. & Holzäpfel, L. (2021). Mit Visualisierungen verstehen(d) lernen. *mathematik lehren* (224), 2–8.

Engel, A. (1987). Stochastik (1. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Henze, N. (2019). Einsen vor der ersten Sechs. KIT Bibliothek. DOI: 10.5445/DIVA/2019-968.

Henze, N., Müller, K. & Schilling, J. (2021). Stochastik rezeptfrei unterrichten: Anregungen für spannende Lehre über den Zufall. Berlin, Heidelberg: Springer.

Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T. & Rott, B. (2018). Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken (1. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer.

Pólya, G. (1949). Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern und München: Francke.

Rott, B. (2013). Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie. Münster: WTM-Verlag.

Sill, H.-D. (2010). Zur Modellierung zufälliger Erscheinungen. *Stochastik in der Schule*, 30(3), 2–13.

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). Didaktik der Stochastik in der Primarstufe. Berlin, Heidelberg: Springer.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). Algebra in der Sekundarstufe (2. Aufl.). Springer Spektrum

Winter, H. (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Anschrift der Verfasserinnen

Judith Schilling
Fachbereich Mathematik, AG Didaktik
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstraße 7
64289 Darmstadt
schilling@mathematik.tu-darmstadt.de

Katja Krüger
Fachbereich Mathematik, AG Didaktik
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstraße 7
64289 Darmstadt
krueger@mathematik.tu-darmstadt.de