Ein literarischer Zugang zu Zufall und Wahrscheinlichkeit

MANFRED BOROVCNIK, KLAGENFURT, STEFAN GÖTZ, WIEN UND JÜRGEN MAASS, LINZ

Zusammenfassung: *Eine ständige Kritik am Mathematikunterricht ist, dass man zwar danach vieles ausrechnen kann, aber zu wenig Mathematik verstehen lernt. Die folgenden Überlegungen zu einem ungewohnten Ausgangspunkt aus der Literatur (Karl Valentin) sollen Lehrkräfte dazu einladen, selbst einmal einen etwas anderen Unterricht zu versuchen – und zu genießen! Dieser Beitrag richtet sich insbesondere an jene mit wenig Erfahrung mit dem Modellieren von Situationen, in denen der Zufall eine Rolle spielt. Hier geht es um eine offene und eigenständige Modellierung, nicht aber um die Wahl eines Standardmodells, wie es in vielen Schulbüchern beim Thema Stochastik üblich ist. Dieser Vorschlag kann im Unterricht umgesetzt werden, sobald die Grundidee von einfachen Wahrscheinlichkeitsberechnungen (Laplace-Wahrscheinlichkeit) behandelt worden ist. In Österreich findet das an Gymnasien in der zehnten Schulstufe statt.*

1 Einleitung

Mittlerweile gibt es viele überzeugende Vorschläge zum Stochastikunterricht, aus denen sich ein bestimmtes Repertoire an Inhalten und Methoden etabliert hat (vgl. etwa Tietze u. a. 2002). Als Beispiel für eine Umsetzung in einer Schulbuchreihe erwähnen wir Götz & Reichel (2010, 2011, 2013): beschreibende Statistik – Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff – Bedingte Wahrscheinlichkeit – frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff – diskrete Zufallsvariable – Binomialverteilung – stetige Zufallsvariable – Normalverteilung – Testen von Hypothesen – Konfidenzintervalle. Ein Charakteristikum dieses Unterrichts ist das Bearbeiten eingekleideter Aufgaben, die erfundene Situationen mit zufälligen Merkmalen thematisieren. Ein offensichtlich auch in dieser Gruppe von Aufgaben übertrieben realitätsfernes Beispiel ist folgendes: Herr X greift im Dunklen (!) in die Sockenlade und überlegt, mit welcher Wahrscheinlichkeit er zwei zueinander passende Socken herausnimmt – statt das Licht einzuschalten. Realitätsnähere Beispiele entstanden im Zuge des datenorientierten Zugangs (vgl. z. B. Eichler & Vogel 2013). Ein Zusammenführen zufälliger Phänomene und statistischer Erscheinungen passiert in Krüger, Sill & Sikora (2015), die dafür eine Prozessbetrachtung stochastischen Modellierens entwickelt haben und diese für die Sekundarstufe I ausführen.

Unser Anliegen in diesem Beitrag ist es, das Phänomen „Zufall“ durch schrittweises Modellieren (vgl. Maaß 2015) einer entsprechenden Situation mathematisch zu beschreiben und damit zu einem rationalen Verständnis zu gelangen. Dazu greifen wir eine literarische Vorlage von Karl Valentin auf, der darin treffend das Alltagsverständnis von „Zufall“ beschreibt.

2 Tatort: Kaufingerstraße, München

Karl Valentin sagt in der „Orchesterprobe“ zum Kapellmeister (Valentin 1977, S. 89 f.):

> „Denken S' Ihnen nur, wir haben gestern einen Zufall erlebt. Ich und der Anderl gehen gestern in der Kaufingerstraße und reden grad so von einem Radfahrer – im selben Moment, wo wir von dem Radfahrer sprechen – kommt zufälligerweise grad einer daher.“

Am Beginn der von uns vorgeschlagenen Unterrichtssequenz sollte die Beschäftigung mit dem Text aus der „Orchesterprobe“ stehen, aus dem das Eingangszitat stammt (vgl. Döhrmann 2004, S. 201). Dort unterbreitet Karl Valentin seine Überlegungen zum „Zufall“. Der Kapellmeister entgegnet Valentin, dass es sich nicht um einen Zufall handelt, da ja auf der Straße täglich Tausende Radfahrer unterwegs seien. Wenn Valentin hingegen gerade von einem Flieger gesprochen hätte und tatsächlich sei gerade einer vorbeigeflogen, sei das wirklich ein Zufall, weil ein (damals) seltenes Ereignis.

Den Text (Valentin 1977, S. 89 f.), ein Video (Bayerischer Rundfunk 2011) mit etwas verändertem Wortlaut gegenüber der schriftlichen Vorlage und einen Stadtplan von München (siehe Abb. 3) nimmt der Lehrer/die Lehrerin am besten gleich in den Unterricht mit. Das Entstehungsjahr des Videos (1933) liegt lang vor dem Beginn des Genderns, deswegen ist im Folgenden nur von Männern die Rede.

2.1 Erste Überlegungen

Nach dem medial unterstützten Einstieg beginnt die Diskussion über die Frage: Hat Karl Valentin oder hat der Kapellmeister Recht? In dieser Diskussion sollen und können die Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen und ihr Vorwissen von dem Begriff „Zufall“ einbringen. Aus der Vielzahl möglicher Ideen zur Füllung dieses Begriffes (vgl. dazu auch Abschnitt 5) sollte die Lehrkraft zwei Positionen den beiden Personen zuordnen: Karl Valentin meinte vermutlich, dass ein Ereignis zufällig eintritt, wenn es dafür keine ersichtlichen Gründe gibt: Er redet über Radfahrer, ein Radfahrer fährt im selben Augenblick an ihm vorbei – ohne irgendeine Form von vorheriger Vereinbarung über Ort und Zeit dieses Zusammentreffens. Der Kapellmeister hingegen scheint eher von der mehr oder weniger großen Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammentreffens zu reden: je mehr Radfahrer pro Tag in dieser Straße fahren, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, einem zu begegnen und desto weniger „zufällig", dass man einem begegnet.

Wir schlagen vor, im Unterricht beiden Richtungen nachzugehen, um zu einem besseren Verständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit beizutragen. Die Position des Kapellmeisters deutlicher herauszuarbeiten, indem die Situation mathematisch modelliert wird, gelingt den Lernenden vermutlich mit einiger Hilfe der Lehrkraft. Wir unterstützen die Planung des Unterrichts, indem wir im Folgenden einige mögliche Schritte zur mathematischen Modellierung gehen, auf die eine im Projektunterricht etwas erfahrene Schulklasse auch selbst kommen kann. – Wir beginnen die Antwort mit einer bewusst sehr vereinfachten Modellierung. Im Gegensatz zu eingekleideten Aufgaben haben wir kein fertiges Standardmodell vor dem inneren Auge. Dieses einfache Modell wird uns erlauben, die in Rede stehende Situation zu quantifizieren. So kann eine intersubjektive Übereinstimmung in der Beurteilung des Geschehens zustande kommen, wenn die gemachten Annahmen akzeptiert werden.

Was ist das Ziel der Modellierung? Wenn aus der Aussage des Kapellmeisters folgt, dass ein ununterbrochener Strom von Radfahrern durch die Kaufingerstraße fährt, ist es nahezu sicher, dass Karl Valentin einen Radfahrer davon trifft. Wer vor einem Matchbeginn auf den Eingang zu einem Fußballstadium zugeht, wird dort nicht zufällig, sondern mit Sicherheit mindestens einen wartenden Menschen treffen. Wenn man allerdings nicht weiß, dass zum Zeitpunkt des Passierens des Stadions in Kürze ein Match beginnen wird, und durch die hineinströmende Menschenmenge behindert wird, wird man vielleicht von einem „dummen Zufall" (im Sinne des Unerwarteten) sprechen. Wer hingegen mit Recht nicht erwartet, an einem bestimmten Ort, z. B. mitten in einer Wüste, einen oder gar viele Menschen zu treffen, kann darüber nachdenken, wie wahrscheinlich eine Begegnung an diesem Ort zu dieser Zeit ist. Schüler und Schülerinnen können sich selbst Situationen ausdenken, die entweder zufällige (im Sinne von seltene oder unerwartete) oder aber nachvollziehbare Koinzidenzen nach sich ziehen.

Für diese erste Modellierung treffen wir nun vereinfachende Annahmen. Später werden wir die Annahmen einerseits z. T. revidieren und andererseits (hoffentlich!) mehr an die Realität anpassen.

2.2 Konkrete Annahmen führen zu Modell 1

Wir behandeln die nötigen Annahmen, die einen kontinuierlichen, deterministischen Strom von Radfahrern beschreiben. Der Zeitpunkt, zu dem K. V. auf die Straße tritt, wird als zufällig behandelt. Ein solcher Vorausblick und gleichzeitig die Einstufung, was das Modell ausmacht, ist beim Lesen eine wichtige Orientierung. Für den Modellierungsprozess schränkt das die Offenheit ein, sodass die Lehrkraft im Unterricht diese Bewertung und Voraussicht nicht vorgeben, sondern erarbeiten lassen soll.

Annahme 1: „Tausende" Radfahrer sind z. B. 3000 Radfahrer.

2014 haben durchschnittlich 7000 Personen die Kaufingerstraße stündlich passiert (tz-online 2014). Um 1930 war die Einwohnerzahl Münchens die Hälfte der jetzigen. Das wären 3500 Passanten stündlich, der Fahrradanteil damals betrug 23 % der deutschen Bevölkerung (Wikipedia o. D., a, b, Deiss 2011, S. 150).

Wir wissen nicht, ob der Kapellmeister tatsächlich eine bestimmte Anzahl meinte oder nur sehr viele. Wenn 3000 Radfahrer täglich durch die Kaufingerstraße fahren, wie viele fahren dann zu einem bestimmten Moment? Um diese Frage beantworten zu können, brauchen wir zusätzliche Annahmen.

Annahme 1a: Ein „Moment" soll einer Momentaufnahme entsprechen; das ist wie ein Foto, das zu einem bestimmten Augenblick gemacht wird.

Annahme 1b: Die Radfahrer fahren bei Tageslicht (innerhalb von zwölf Stunden).

Annahme 1c: Sie sind – deterministisch – in gleichen Abständen auf der ganzen Kaufingerstraße verteilt.

Jetzt können wir ausrechnen: 3000 Radfahrer in zwölf Stunden sind 250 pro Stunde. Pro Minute sind demnach etwa vier Radfahrer auf der Kaufingerstraße, die sich gleichmäßig auf die 260 Meter lange Straße verteilen.

Anmerkung: Bei 2880 am Tag sind es genau vier Radfahrer pro Minute und in jedem Augenblick, wenn alle 15,6 km/h = 260 m/min fahren.

Ungefähr alle 65 Meter befindet sich also ein Radfahrer (siehe Abb. 1). Wir setzen dabei voraus, dass die Bewegung vorerst keine Rolle spielt. Die Radfahrer kommen außerdem nur von einer Seite. Übrigens: 1905 war die Kaufingerstraße eine Einbahn nach dem Frauenplatz (Kettler o. D.).

Abb. 1: Kaufingerstraße mit vier Radfahrern

Annahme 2: Die Straße ist gerade und übersichtlich, wie ein Blick auf den Stadtplan zeigt: Die Kaufingerstraße ist ein Teil des Weges vom Karlsplatz zum Marienplatz, etwa 260 Meter lang und verläuft tatsächlich ziemlich geradlinig (Abb. 3).

Annahme 3: „Is grad einer daherkomma“ (Valentin 1977, S. 90), übersetzen wir in: Mindestens ein Radfahrer ist höchstens *zehn Meter* von Valentin und seinem Bekannten entfernt (siehe Abb. 2). Mit anderen Worten: Wenn Valentin und sein Begleiter die Straße an einer Stelle betreten, die zehn oder weniger Meter von einem Radfahrer entfernt ist, „trifft“ er einen Radfahrer.

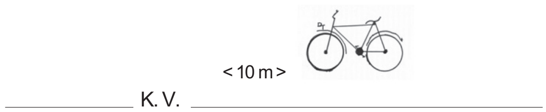

Abb. 2: Karl Valentin „trifft“ einen Radfahrer

Von dem Bereich von 65 Metern um einen Radfahrer sind 20 Meter günstig für das Treffen, also

$$p_1 = \frac{20}{65} \approx 0{,}3077. \qquad \text{(Modell 1)}$$

Damit wir so rechnen können, müssen wir eine weitere Annahme treffen.

Annahme 4: Valentin und sein Bekannter betreten die Straße irgendwo zufällig.

Wir können uns die Anwendung der geometrischen Wahrscheinlichkeit so vorstellen, dass ein Streifen mit Radfahrern im Abstand von 65 Metern an uns vorbeigezogen wird. Es kommt darauf an, dass wir einen Radfahrer in unserem Sichtbereich von 20 m haben. Da alle Abschnitte von 65 m gleich beschaffen sind, können wir uns auf einen beschränken: da unser Punkt zufällig gewählt wird, sind 20 von 65 m günstig für ein Treffen.

Wir halten an dieser Stelle fest, dass ein fixer Standpunkt von Valentin die Modellierung beeinflusst; wir greifen das in Modell 2 auf. Bisher ist Valentins Position zufällig im Sinne von „alle Orte der Kaufingerstraße sind gleichwahrscheinlich“ und die Position der Radfahrer wird deterministisch modelliert.

Eine Variante ist, wenn Valentin zu einem zufälligen Zeitpunkt mit seinem Bekannten die Kaufingerstraße betritt. Auch dann treffen sie auf einen Radfahrer mit Wahrscheinlichkeit $\frac{20}{65}$.

In jedem Fall defiliert der Strom der Radfahrer deterministisch vorbei.

Anmerkung: Skizzen sind immer wertvoll: Es mag auffallen, dass wir die Länge der Fahrräder bisher nicht berücksichtigt haben. Wir holen das nach.

Ein *Zwischenfazit* zeigt, dass es mit einigen Annahmen und Schätzungen gelungen ist, eine Wahrscheinlichkeit dafür auszurechnen, dass gerade in dem Moment ein Radfahrer vorbeikommt, in dem K. V. die Straße betritt. Wie ist das Ergebnis 0,3077 im Lichte

Abb. 3: Stadtplanauszug von München mit Kaufingerstraße

von „Zufall oder nicht?“ zu werten? Das Ereignis mag zwar unerwartet sein, aber seine Wahrscheinlichkeit ist nicht klein! Betritt K. V. des Öfteren die Kaufingerstraße, dann wird er im Schnitt drei von zehn Mal einen Radfahrer treffen.

Für den Mathematikunterricht stellt sich nun die Frage: Wie geht es weiter? Sollen jetzt die Annahmen diskutiert und variiert werden? Eines ist jedenfalls jetzt schon offensichtlich: eine Modellierung hängt immer von (mehr oder weniger realitätsnahen) Annahmen ab.

Anmerkung zur Unterrichtsmethode: Im Mathematikunterricht ist eine offene Entscheidungssituation immer eine Herausforderung. Üblicherweise und ganz zurecht führt die Lehrkraft aufgrund ihrer Unterrichtsplanung und der zu erreichenden Lehrziele durch das Unterrichtsgeschehen. Hier bietet sich eine Chance, einen Beitrag auf dem Wege zum übergeordneten und sehr wichtigen Lehrziel „Erziehung zur Mündigkeit“ (Adorno 1971) zu leisten. Wenn die Schülerinnen und Schüler rückblickend überlegen, was sie eigentlich wollten und was sie bisher erreicht haben, können sie auf dieser Grundlage selbst entscheiden, welche Schritte auf dem Weg zum angestrebten Ziel sinnvoll und machbar sind. Genau solche Überlegungen und Entscheidungen sollen sie nach der Schule ohne Hilfen selbst durchführen können.

2.3 Ein anderer Ansatz: Modell 2

Im Folgenden stellen wir eine andere Startmodellierung vor, um auf die Frage antworten zu können, wie eine Lehrkraft im Unterricht mit verschiedenen Modellierungsansätzen umgehen kann. Im Gegensatz zu Modell 1 ist nun der Radfahrerstrom zufällig, während der Zeitpunkt und der Ort, wo K. V. auf die Straße tritt, fixiert sind. Wir gehen von einer bestimmten Zahl von Radfahrern aus.

Annahme 1c*: Jeder Radfahrer wählt jetzt einen Ort auf der Kaufingerstraße zufällig. Sie sind *unabhängig voneinander* unterwegs. Der Beobachter ist nun fix (mindestens zehn Meter von den Enden der Kaufingerstraße entfernt).

Aus dieser Annahme folgt, dass der Abstand zwischen den Radfahrern zufällig und nicht systematisch wie in Modell 1 ist. Wir gehen von vier Radfahrern aus, damit wir die Ergebnisse mit jenen von Modell 1 vergleichen können.

Günstig im Sinne des Treffens sind nun (wie oben – geometrische Wahrscheinlichkeit) 20 von 260 m, also

$$p = \frac{20}{260} \approx 0{,}0769 .$$

Die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Radfahrer zu treffen, ist dann die Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses „keinen zu treffen“. Diese Wahrscheinlichkeit ist $1 - p$ für *einen* Radfahrer, im Falle der Unabhängigkeit $(1 - p)^4$ für *vier* Radfahrer. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit für Treffen ist nun

$$p_2 = 1 - \left(\frac{240}{260}\right)^4 \approx 0{,}2740 . \qquad \text{(Modell 2)}$$

Annahme 1c haben wir hierfür fallen gelassen. Stattdessen stellen wir uns jetzt vor, dass die Radfahrer zum Beobachtungszeitpunkt unabhängig voneinander die günstigen 20 m mit Wahrscheinlichkeit p befahren. Dabei ist es egal, wo wir beobachten.

Die eben bestimmte Wahrscheinlichkeit für ein Treffen mit K. V. differenziert nicht nach besonderen Mustern, in denen die Radfahrer fahren. Wenn die vier Radfahrer zufällig und unabhängig voneinander die Straße befahren, so ergibt sich eine Treff-Wahrscheinlichkeit von 0,2740. Diese Wahrscheinlichkeit ist etwas kleiner als in Modell 1 (um rund 10 %). Das ist leicht erklärlich, denn jetzt können Radfahrer auch enger beieinander fahren (sie haben keinen systematischen Abstand wie in Modell 1). Dann aber sind größere Abschnitte ohne Radfahrer. Das wirkt sich eben so aus, dass die Treff-Wahrscheinlichkeit kleiner wird.

Es kann nun passieren, dass alle vier Radfahrer die günstigen 20 m gleichzeitig befahren (quasi im Pulk, vgl. Abschnitt 3.5). Das geschieht mit Wahrscheinlichkeit p^4. Würden sie sich (entgegen Annahme 1c*) absprechen, also als Gruppe die Kaufingerstraße befahren, dann wäre die entsprechende Wahrscheinlichkeit gleich p (0,0769; so wie bei einem einzelnen Radfahrer), dass K. V. auf sie trifft.

2.4 Ein Vergleich der beiden Modelle

„Zufällig“ im Sinne von gleichwahrscheinlich war einmal der Ort des Betretens der Kaufingerstraße von K. V. (Modell 1), einmal der Ort des Befahrens durch die Radfahrer (Modell 2). Darüber hinaus gibt es zufällige Momente in den bisherigen Modellierungen, die aber nicht zur Klärung der Frage nach dem Wesen des Zufalls beitragen. Hier sind sie Bestandteil der jeweiligen Modellierung. Wir erkennen daraus, dass Zufall eine besondere Sicht verbunden mit einer Modellierung ist.

Bemerkenswert ist, dass die Wahrscheinlichkeiten in beiden Modellen numerisch nahe beieinanderliegen, denn es gilt, vorausgesetzt es sind in beiden Fällen vier Radfahrer in der Kaufingerstraße:

$$p_1 = 4p \text{ und } p_2 = 1 - (1 - p)^4 .$$

(Die erste Beziehung gilt, weil durch vier Radfahrer der mögliche Bereich von 260 auf 260/4 Meter eingeschränkt wird.) Analytisch kann man das mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes begründen:

$$(1-p)^4 \approx 1-4p \text{ bzw. } (1-p)^n \approx 1-np\,.$$

Dabei wird die Näherung umso besser, je kleiner p ist (insofern $n \in \mathbb{N}$ fixiert ist). Höhere Potenzen von p werden einfach ob ihrer Kleinheit vernachlässigt.

Wir haben an dieser Stelle begonnen, die beiden Modelle sowohl inhaltlich als auch numerisch miteinander zu vergleichen. Dies sollte „zum guten Ton" beim Modellieren gehören. In dieser Reflexionsphase können Schüler und Schülerinnen selbst (in Gruppenarbeit) eigenständige Beiträge entwickeln.

Wenn wir die Treff-Wahrscheinlichkeit aus Modell 1 mit jener aus Modell 2 vergleichen, so ergibt sich:

$$p_1(n) = n \cdot \frac{20}{260} \text{ für } n < 13 \text{ und } 1 \text{ sonst;}$$

$$p_2(n) = 1 - \left(1 - \frac{20}{260}\right)^n.$$

Dabei bezeichnet n die Anzahl der Radfahrer auf der Kaufingerstraße. Wenn diese Anzahl steigt, dann wird auch die Treff-Wahrscheinlichkeit größer, allerdings in unterschiedlicher Weise. Einmal steigt sie linear mit n, und wenn $n = 13$ (oder größer) ist, dann ist die Treff-Wahrscheinlichkeit gleich eins. Die Radfahrer bevölkern dann die Kaufingerstraße in 20 m-Abständen zur Gänze, in diesem Modell ist es sicher, dass Karl Valentin auf einen Radfahrer trifft.

Das zweite in Rede stehende Modell zeigt ein ganz anderes Verhalten: die Treff-Wahrscheinlichkeit nähert sich bloß asymptotisch dem Wert eins, wenn die Anzahl der Radfahrer (über alle Maße) steigt. Spätestens hier übersteigt das Modell die Grenzen der Realität (vgl. Fischer & Malle 1985, S. 99). Schon 144 bzw. 145 Radfahrer (je nach Rundung) stehen Vorderrad berührend das Hinterrad des Vordermanns entlang der gesamten Länge der Kaufingerstraße (einen Konvoi bildend quasi), wenn wir eine mittlere Fahrradlänge von 1,8 m annehmen. Die Abhängigkeit hier ist exponentiell.

In Abb. 4 sind die jeweiligen Abhängigkeiten, die die beiden Modelle mit sich bringen, als funktionale Graphen dargestellt.

Es ist einfach auszurechnen, dass in Modell 1 bei sieben Radfahrern die Treff-Wahrscheinlichkeit erstmalig über 0,5 liegt, wohingegen das bei Modell 2 erst bei neun Radfahren der Fall ist.

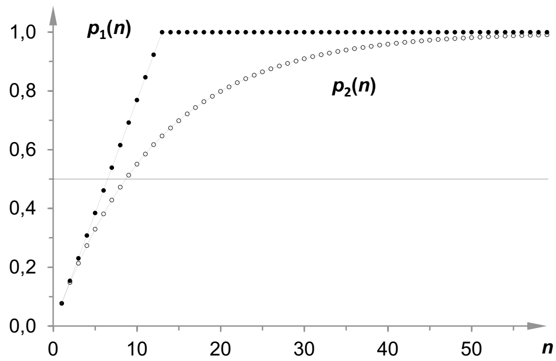

Abb. 4: Treff-Wahrscheinlichkeiten in beiden Modellierungen abhängig von der Zahl der Radfahrer

Anmerkung: Wir haben bewusst zwei verschiedene Modellierungen verglichen, weil wir in einem offenen Unterricht zum Modellieren nicht davon ausgehen können, dass alle Schüler und Schülerinnen zum gleichen Modell gelangen. Sie sollen lernen, mehrere Modellierungsansätze gegeneinander abzuwägen: Welches ist besser bzw. angemessener?

3 Verfeinerungen von Modell 1: Änderungen der Ausgangssituation

Wir verfeinern die Annahmen über den Strom der Radfahrer aus Modell 1. Wir haben mit stark vereinfachenden Annahmen begonnen, um überhaupt eine erste Modellrechnung durchführen zu können. In diesem Abschnitt untersuchen wir nun, welche Auswirkungen es hat, wenn wir uns der Realität in verschiedener Weise annähern. Für den Schulunterricht empfehlen wir, jeweils vorher zu entscheiden, welche Schritte unternommen werden sollen und hinterher zu überlegen, welche Auswirkungen die neuen Modellierungen und Berechnungen haben: Sind wir der Realität nähergekommen? Hilft uns das?

Wir gehen wie in Modell 1 von einem kontinuierlichen, deterministischen Strom von Radfahrern aus. Wir beginnen mit einer Modellrechnung zu Annahme 1. Wir haben mehr oder weniger willkürlich 3000 Radfahrer angenommen, die in zwölf Stunden durch die Kaufingerstraße fahren. Wir halten fest, dass eine Begegnung mit einem Radfahrer sicher stattfindet, wenn die Radfahrer so zahlreich fahren, dass an jedem Punkt der Kaufingerstraße zu jeder Zeit mindestens ein Radfahrer in Sicht (also höchstens zehn Meter entfernt von Karl Valentin) ist, egal, wo sich K. V. befindet.

3.1 Kontinuierlicher Radfahrerstrom

Wie viele Radfahrer müssten an einem Tag durch die Kaufingerstraße fahren, damit eine Begegnung auf jeden Fall stattfindet (d. h., von einem Wirken des

Zufalls unabhängig ist)? Zur Berechnung erinnern wir uns an Abb. 2: Valentin trifft auf einen Radfahrer, wenn dieser zehn Meter oder weniger weit von ihm entfernt ist, sobald er die Straße betritt. Wenn demnach die maximalen Abstände von je zwei Radfahrern zwanzig Meter betragen, trifft er auf jeden Fall einen Radfahrer (Abb. 5). Noch genauer soll der Abstand von Karl Valentin zum Mittelpunkt des Rades (also etwa dort, wo die Pedale sind) maximal 10 Meter betragen. Damit erhalten wir zugleich eine plausible, das Modell vereinfachende Zusatzannahme.

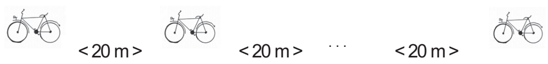

Abb. 5: Kaufingerstraße mit vielen Radfahrern

Nun sollen die Radfahrer jeweils mehr als 20 Meter Abstand voneinander haben. Dann gibt es – so wie in Abb. 1 – keine Überlappungen der „günstigen“ Bereiche.

Wie beim Modellieren üblich und sinnvoll, fangen wir mit einfachen Annahmen an und überlegen in späteren Schritten zur Modellverfeinerung, welche Änderungen oder Zusätze in den Berechnungen wir einfügen müssen, um weniger einfache Fälle angemessen zu berücksichtigen. Dabei kann es passieren, dass der Modellierungskreislauf nicht zur Gänze durchlaufen wird (vgl. Eichler & Vogel 2013, S. 17), sondern zugunsten der Aufnahme neuer Annahmen abgekürzt wird. Sowohl beim Ergänzen der Schritte im Modellierungskreislauf als auch beim Treffen neuer oder veränderter Annahmen (siehe die folgenden Abschnitte!) kann Eigentätigkeit von Schülern und Schülerinnen angeregt werden.

Wenn wir in den ersten Modellen von einer festen Anzahl Radfahrern sprechen, die sich in einem bestimmten Moment auf der Kaufingerstraße befinden, reihen wir sie in Gedanken von einem Straßenende beginnend in gleichen Abständen auf und summieren die Länge der Strecken, die sie auf diese Weise abdecken. In späteren Modellierungsschritten fahren unsere Radfahrer auch in Gruppen oder beliebigen Abständen. Da wir nicht wissen, an welcher Stelle der Straße Karl Valentin auftritt, spielt es auch keine Rolle, von welchem Ende aus wir die Radfahrer auffädeln.

Wir nehmen an, dass die Radfahrer alle einen Abstand von 26 m haben. Wir platzieren den ersten Radfahrer auf einen Punkt, der 13 Meter vom Marienplatz entfernt ist, den zweiten 26 Meter entfernt usw. und den letzten daher 247 m entfernt, also 13 Meter vor dem Ende der Straße. Wie viele brauchen wir dazu? Zehn Radfahrer! Mit anderen Worten: Unter den bisherigen Modellannahmen brauchen wir mindestens zehn Radfahrer zum Zeitpunkt der Momentaufnahme (Annahme 1a); das würden $\frac{10}{4} \cdot 2880 = 7200$ pro Tag (gerechnet mit 12 Stunden, vgl. Abschnitt 2.2) sein, wenn sie gleich schnell fahren, wie in Annahme 1 stillschweigend angenommen, aber nicht diskutiert wird (siehe Abschnitt 3.4 für den Einfluss der Geschwindigkeit). Damit unsere Modellannahmen passen, müssen all diese Menschen in einer Reihe mit gleichen Abständen (26 m) über zwölf Stunden gleichmäßig verteilt fahren. Sehr unrealistisch!

Im Hinblick auf die Ausgangsfrage merken wir uns, dass Valentin sicher einen Radfahrer trifft, falls durchgehend hinreichend viele unterwegs sind. Wie viele Radfahrer das in diesem Fall genau sein müssen, hängt von weiteren Modellannahmen insbesondere über das Fahrverhalten und damit die Streuung der Radfahrer in der Kaufingerstraße ab. Wir können diese Überlegung zusammenfassend dem Kapellmeister recht geben: Wenn „viele Tausend“ Radfahrer unterwegs sind, ist es sehr wahrscheinlich (in diesem Sinne kein Zufall), dass Karl Valentin einen trifft.

3.2 Fahren in „zufälliger“ Anordnung

Wir verstehen in diesem Abschnitt „zufällig“ als nicht systematisch. Das ist eine nicht generell verwendete Bezeichnung, die aber mit der Deutung von zufällig meint „ohne jede Absicht“ zusammentrifft. Zufällig im Sinne von „reinem Zufall“ wird in Abschnitt 4 behandelt werden.

Wer einmal bewusst darauf geachtet hat, wie eine größere Gruppe Radfahrer bzw. Radfahrerinnen eine Straße entlangfährt, wird mit uns darin übereinstimmen, dass unsere erste Modellannahme (alle fahren mit gleicher Geschwindigkeit und gleichem Abstand in die gleiche Richtung) sehr unrealistisch ist. Tatsächliche fahren sie oft in Gruppen, mit unterschiedlichem Abstand und unterschiedlich schnell (Abb. 6). Wie ändern sich unsere Modellberechnungen, wenn wir uns der Realität annähern und zu diesem Zweck zunächst die Abstände unregelmäßig annehmen? Wir rechnen einige Szenarien mit verschiedenen Mustern für die Abstände durch.

Abb. 6: „Zufällige“ Anordnung

Ohne im Detail etwas zu rechnen, können wir davon ausgehen, dass eine solche unregelmäßige Anordnung der Radfahrer dazu führt, dass sie einen geringeren Teil der Straße abdecken, weil nicht alle Abstände d_i größer oder gleich 20 Meter sind, sondern einige kleiner (Abb. 6). Damit sinkt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Valentin einen von ihnen trifft (bzw. in seiner Nähe sieht), wenn er die Straße betritt, und die Anzahl der Radfahrer auf der Kaufingerstraße zu jedem Beobachtungszeitpunkt konstant bleibt. Außerdem können wir den Unterschied zur geordneten Reihung nur dann exakt angeben, wenn wir alle Abstände zwischen je zwei Fahrrädern kennen. Wie sieht das als Formel aus?

Beginnen wir den Weg zu einer Formel mit einer einfachen Situation: Wir betrachten zwei Radfahrer mit einem beliebigen Abstand d. Wenn d größer oder gleich 20 Meter ist, können analoge Überlegungen wie für Modell 1 angestellt werden, dass Karl Valentin „zufällig" einen von ihnen trifft (bzw. in seiner Nähe sieht), wenn er die Straße betritt. Die günstigen Bereiche überlappen einander dann nicht.

Interessant ist nun der Fall, dass die beiden Radfahrer näher zusammen sind, also $d < 20$ m. Machen wir eine Skizze für $d = 8$ m (Abb. 7).

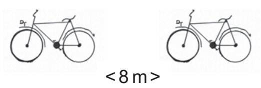

Abb. 7: Zwei Radfahrer im Abstand von 8 Metern

Dann decken diese beiden Radfahrer einen Bereich von 10 Meter vor dem ersten Radfahrer plus 8 Meter zwischen den beiden plus 10 Meter hinter dem zweiten Radfahrer ab. Insgesamt beträgt demnach die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Karl Valentin „zufällig" einen von ihnen trifft (bzw. in seiner Nähe sieht), wenn er die Straße betritt, $\frac{28}{260} \approx 0{,}1077$.

Anmerkung: Da wir jetzt keinen kontinuierlichen Strom von Radfahrern im Hintergrund haben, müssen wir zusätzlich voraussetzen, dass K. V. in jener Zeit auf die Straße tritt, während die zwei Radfahrer sich irgendwo auf der Straße befinden.

Zum Vergleich: wenn d mindestens 20 m ist, ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{40}{260} \approx 0{,}1538$. Ist $d = 0$ m, d. h., die beiden Radfahrer fahren parallel (nebeneinander), so beträgt die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{20}{260} \approx 0{,}0769$. Mit anderen Worten: Der zweite Radfahrer ändert dann die Wahrscheinlichkeit nicht.

Nun machen wir einen großen Schritt zu n Radfahrern, die mit Abständen d_1 bis d_{n-1} über die Kaufingerstraße fahren. Dann können wir sie so anordnen, dass sie beginnend 10 Meter von einem Ende der Straße aufgereiht fahren. Der letzte ist 10 m vom anderen Ende der Kaufingerstraße entfernt. Wenn alle Abstände kleiner als 20 m sind, dann sieht K. V. sicher einen Radfahrer, wenn er die Kaufingerstraße betritt (während sie die Straße befahren), egal, wo oder wann er dies tut.

Andernfalls sind auch Abstände größer als 20 m zu vermerken. Sagen wir, es sind sechs Radfahrer gemäß Abb. 8 auf der Kaufingerstraße. Es sind $d_1 = 8$, $d_2 = 7$ und $d_3 = 16$ (alles in Metern). Sie decken zusammen einen Bereich von

$$10 + d_1 + 10 + 10 + d_2 + d_3 + 10 + 10 + 10 =$$
$$6 \cdot 10 + d_1 + d_2 + d_3 = 60 + 31 = 91$$

Metern ab. Dabei gehen wir davon aus, dass die Abstände zwischen Radfahrer B und Radfahrer C und der zwischen E und F jeweils (deutlich) größer als 20 m sind. Im ursprünglichen Modell 1 (Abschnitt 2.2) wären $6 \cdot 20 = 120$ m abgedeckt.

Abb. 8: Sechs Radfahrer in unregelmäßigen Abständen

Zur Verallgemeinerung konstatieren wir drei Gruppen von Fahrradfahren in Abb. 8: AB, CDE und F. Innerhalb einer Gruppe sind die Abstände kleiner als 20 m. Jede Gruppe deckt $2 \cdot 10 = 20$ m plus die Summe der inneren Abstände ab. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{20 \cdot k + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_l}{260},$$

wobei k die Anzahl der Gruppen ist und l die der inneren Abstände: $k + l = n$. Selbstverständlich kann auch diese Wahrscheinlichkeit nicht größer als eins werden – wenn entsprechend viele Radfahrer unterwegs sind, trifft Valentin auf jeden Fall (also nicht zufällig) einen von ihnen.

Können wir noch etwas darüber aussagen, wie groß $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_l$ ist? Nein. Wir haben vielleicht Beobachtungen aus dem Alltag, nach denen Radfahrer oft in kleinen Gruppen gemeinsam fahren, aber vorerst keinen Grund, eine bestimmte Verteilung (auch nicht eine Normalverteilung; aber siehe Abschnitt 4) der Radfahrer anzunehmen, um dann aufgrund dieser Vermutung die Treff-Wahrscheinlichkeit genauer berechnen zu können.

3.3 Länge der Fahrräder

Gleich beim Betrachten der ersten Skizze (Abb. 1) fällt auf, dass wir die Fahrräder der Einfachheit halber punktförmig modelliert haben. Nun werden wir etwas realitätsnäher, indem wir jedem Fahrrad eine Länge zugestehen. Messungen ergeben, dass die meisten Fahrräder etwas weniger als zwei Meter lang sind. Wir verzichten nun auf eine genauere Prüfung und nehmen eine Länge von 1,8 m pro Fahrrad an. Aus Abb. 1 wird dann Abb. 9.

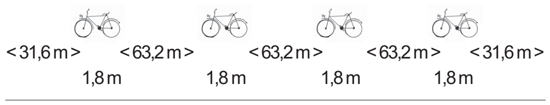

Abb. 9: Vier Radfahrer mit je 1,8 m Länge

Nun müssen wir uns entscheiden: Entweder wir bleiben dabei, dass insgesamt 20 Meter als Treffer gelten, also 9,1 m vom vorderen Ende und vom hinteren Ende des Fahrrads gemessen. In diesem Fall ändern sich die bisherigen Berechnungen nicht. Oder wir geben jeweils 90 cm vorn und hinten dazu. Dann steigt die in Betracht kommende Länge für einen Treffer pro Fahrrad von 20 auf 21,8 Meter (also um rund 10 %). Die Art der Berechnung bleibt gleich, bloß die Treff-Wahrscheinlichkeit wird größer (sie steigt von 0,3077 auf 0,3354).

3.4 Geschwindigkeit der Radfahrer

Schon im Wort „Radfahrer“ steckt die Bewegung, das Fahren. Wir haben bisher in unseren Modellrechnungen stets eine Momentaufnahme unterstellt. Wir betrachten einen Zeitpunkt t, zu dem Karl Valentin die Kaufingerstraße betritt und die Frage ist, ob er augenblicklich einen Radfahrer in höchstens 10 Meter Entfernung sieht oder nicht.

In Modell 1 mit dem stetigen (deterministischen) Strom von Radfahrern im selben Abstand spielt nur eine Rolle, *wie viele* Radfahrer gleichzeitig auf der Kaufingerstraße sind. Wie schnell sie fahren, ist für die Treff-Wahrscheinlichkeit OHNE Belang. Es geht immer nur um den günstigen Bereich von 20 Metern im Vergleich zum möglichen; das ist der Bereich zwischen den Radfahrern. Egal, wo K. V. hineinkommt, es zählt nur, ob er den günstigen Bereich trifft, wie schnell diese Bereiche vorbeiziehen, spielt keine Rolle für die Treff-Wahrscheinlichkeit.

Was passiert, wenn er gemütlich plaudernd die Straße betritt und nebenbei eine Zeit lang auf Radfahrer achtet? Dann spielt es offenbar eine Rolle, dass die Radfahrer in Bewegung sind. Wie schnell sind sie unterwegs? Wie lange braucht ein Radfahrer, um die ganze Kaufingerstraße entlang zu fahren? Wir setzen für die Bewegung der Radfahrer eine gleichförmige Translation voraus, das heißt die Radfahrer fahren mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig durch die Kaufingerstraße.

Machen wir eine Versuchsrechnung für ein Tempo von 20 km/h. Wie lange braucht ein Radfahrer mit dieser Geschwindigkeit für die 260 Meter? Wir rechnen die Geschwindigkeit erst in Meter pro Sekunde um: 20 km/h = 20000 m/h $\approx$ 5,556 m/s.

Für 260 m benötigt er 46,800 Sekunden; in ungefähr einer dreiviertel Minute fährt ein Radfahrer also die ganze Kaufingerstraße entlang.

Wie schnell muss er (oder sie) fahren, um dafür genau eine Minute zu benötigen? – 15,6 km/h. Wenn in zwölf Stunden 3000 Radfahrer mit dieser Geschwindigkeit in gleichen Abständen an einem Punkt vorbeifahren, fährt alle 15 Sekunden einer von ihnen an Karl Valentin vorbei. Unter dieser Annahme werden Schüler und Schülerinnen schlussfolgern, dass es kein Zufall im Sinne von unerwartet oder selten ist, wenn Karl Valentin einen Radfahrer trifft.

Anmerkung: Genauer fahren 2880 Radfahrer am Tag im selben Abstand von 65 m mit 15,6 km/h, so sind in jedem Moment genau vier Radfahrer auf der Kaufingerstraße. Das war Annahme 1.

Bevor wir weiter gehen, schaffen wir uns einen Überblick über den zurückgelegten Weg bei ein paar ausgewählten Geschwindigkeiten für den Radfahrer (Tab. 1).

Fahren die Radfahrer 15,6 km/h, so defilieren sie alle 15 Sekunden an einem beliebigen Platz vorbei. K. V. trifft auf einen, wenn dieser 10 m von ihm entfernt ist, d. h., der Radfahrer muss sich in einem Bereich von 20 m befinden. Um diese Strecke zu befahren, braucht er 4,615 s (siehe Tab. 1). In der Momentaufnahme ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit für ein Treffen mit K. V. von $\frac{4{,}615}{15{,}000} \approx 0{,}3077$.

Diesen Wert kennen wir schon aus Modell 1. Wir haben nur die 20 m günstiger Bereich und die 65 m möglicher Bereich in Zeit umgerechnet: für 65 m benötigt der Radfahrer 15 Sekunden, für die 20 m 4,615.

Wenn wir jetzt davon ausgehen, dass K. V. die Straße nach dem Betreten eine Zeit lang beobachtet und – um es rhetorisch zu überhöhen – über Radfahrer spricht, so trifft sein Sprechen über Radfahrer und die Begegnung mit einem Radfahrer mit folgenden Wahrscheinlichkeiten zusammen, abhängig von der Beobachtungsdauer (wir unterstellen nach wie vor eine Geschwindigkeit von 15,6 km/h).

Geschwindigkeit			
15,6 km /h		10 km/h	
Weg m	Zeit s	Weg m	Zeit s
15600	3600	10000	3600
4,333	1,000	2,778	1,000
10	2,308	10	3,600
20	4,615	20	7,200
65	15,000	65	23,400
260	60,000	260	93,600

Geschwindigkeit			
15 km /h		20 km /h	
Weg m	Zeit s	Weg m	Zeit s
15000	3600	20000	3600
4,167	1,000	5,556	1,000
10	2,400	10	1,800
20	4,800	20	3,600
65	15,600	65	11,700
260	62,400	260	46,800

Tab. 1: Die unterlegte Zeile gibt die Geschwindigkeit in m/s an. Die Zeit, die benötigt wird, wird u. a. für den Sichtbereich von K. V. (20 m) angegeben.

Lassen wir K. V. 4,615 Sekunden über Radfahrer sprechen und die Straße „beobachten", so erhöht sich die Treff-Wahrscheinlichkeit im Vergleich zur Momentaufnahme auf

$$\frac{4{,}615 + 4{,}615}{15{,}000} \approx 0{,}6153.$$

Man beachte, dass im diesem Beobachtungszeitraum der Radfahrer eine Strecke von 20 m zurücklegt, sodass es auch dann zu einem Treffen kommt, wenn er zu Beginn noch 30 m weg war. Das erhöht den günstigen Bereich in Modell 1 um weitere 20 m, sodass sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{20 + 20}{65} \approx 0{,}6154$$

ergibt. Die Umrechnung von Metern in Zeit ergibt denselben Wert (bis auf den Umstand, dass wir hier mit gerundeten Werten gerechnet haben).

Vergrößern wir den Beobachtungszeitraum auf 9,230 (rund zehn) Sekunden, was eine unmerkliche Spanne ausmacht, dann erhöht sich der günstige Bereich um weitere 20 m und die Wahrscheinlichkeit, dass ein K. V. einem Radfahrer begegnet, beträgt nun

$$\frac{9{,}230 + 4{,}615}{15{,}000} = 0{,}9230 \left(60/65 \approx 0{,}9231\right).$$

Kein Wunder, dass K. V. seinen Radfahrer zur Verwunderung der Zuhörer fast immer parat hat.

Jetzt untersuchen wir, wie sich eine Geschwindigkeit von 20 km/h auf das Treffen mit K. V. auswirkt. Bei dieser Geschwindigkeit benötigt ein Radfahrer rund 46,8 Sekunden, um die Kaufingerstraße zu passieren (Tab. 1). Gehen wir nach wie vor davon aus, dass es vier Radfahrer im gleichen Abstand von 65 m auf der Straße gibt, so werden diese vier Radfahrer alle 46,8 Sekunden ausgetauscht. Das ergibt pro Stunde rund 308 und am Tag rund 3692 Radfahrer (rund 20 % mehr als in Modell 1).

Bei 10 km/h benötigt ein Radfahrer 93,6 Sekunden für die Kaufingerstraße (Tab. 1). Nehmen wir wieder gleichzeitig vier Radfahrer im Abstand von 65 m, so werden diese nun alle 93,6 Sekunden ausgetauscht. Das ergibt pro Tag rund 1846 Radfahrer (weit weniger als in Modell 1).

Lassen wir K. V. gleich lang beobachten wie zuvor, so ergeben sich folgende Treff-Wahrscheinlichkeiten (Tab. 2; wir rechnen jetzt mit genaueren Werten).

Beobachtungs-	Geschwindkeit km/h		
dauer	10	15,6	20
Momentaufnahme	0,3077	0,3077	0,3077
4,615	0,5049	0,6154	0,7022
9,231	0,7022	0,9231	1,0000

Tab. 2: Treff-Wahrscheinlichkeit bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Beobachtungsdauern

3.5 Ein Pulk von Radfahrern

Wie sieht es aus, wenn die Radfahrer nicht in einem gleichmäßigen Strom dahinfahren, sondern in bestimmten „Mustern"? In der Früh kann es sein, dass ein Pulk von Radfahrern, sagen wir gegen 7:45 Uhr, zur Arbeit durch die Kaufingerstraße fährt. Damit ist die bisherige Annahme in Modell 1, dass die Radfahrer gleichmäßig nicht überlappend einen Bereich von 20 m der Kaufingerstraße abdecken (Annahme 1c), nicht mehr aufrecht zu erhalten. Stattdessen modellieren wir, dass zwölf Radfahrer mit 20 km/h im Pulk die Kaufingerstraße durchfahren. Dafür brauchen sie wie gehabt 46,800 s. Wir nehmen weiterhin an, dass sie nebeneinander fahren, und die längste Reihe aus sechs Fahrrädern besteht, die je eine Fahrradlänge Abstand halten: dann ist der Pulk circa 20 Meter lang (Abb. 10).

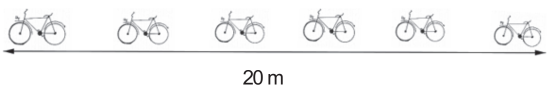

Abb. 10: Ein Pulk von Radfahrern

Nehmen wir nun an, dass Valentin um 7:45 Uhr die Kaufingerstraße im Gespräch betritt. Da wir jetzt keinen durchgehenden Strom von Radfahrern (oder von Pulks von Radfahrern) haben, muss dieser Zeitpunkt in das Zeitintervall fallen, währenddessen der Pulk die Straße passiert; ansonsten trifft er sie ja sicher nicht. Ob jetzt K. V. dieses Intervall trifft oder nicht, darüber kann man keine vernünftige Annahme treffen. (Oder: wir lassen auch die Pulks kontinuierlich im Abstand von 260 m verkehren.)

Der Pulk fährt durch die Straße (zieht vorbei). Er braucht dazu 46,8 s. Es ist nur die Frage, ob K. V. das Fenster des Treffens zufällig trifft. Das sind die 10 m vor und nach und die 20 m Länge des Pulks. In Zeit umgerechnet bedeutet das jeweils 3,6 s. Günstig ist das Fenster von 7,2 s, möglich 46,8 s.

Der Pulk zieht durch; zufällig ist nur, wann K. V. seine Beobachtung macht. Wenn er über den Moment hinaus auch noch eine Zeit lang beobachtet, so vergrößert sich der günstige Bereich um die Beobachtungsdauer.

Wir geben die Treff-Wahrscheinlichkeiten mit dem Pulk in Tab. 3 für verschiedene Geschwindigkeiten wieder. Im Vergleich zur den Wahrscheinlichkeiten im kontinuierlichen Strom der Radfahrer haben wir nun viel kleinere Werte. Auf der einen Seite ist der Pulk 20 m lang im Vergleich zu den einzelnen Radfahrern, was ein Treffen begünstigt. Auf der anderen Seite haben wir im Strom immer wieder Radfahrer, die nachkommen, während wir hier nur einen einzelnen Pulk betrachten (und sonst nichts); der mögliche Bereich erstreckt sich daher nun auf 260 m, was ein Treffen sehr benachteiligt.

Beobachtungs-dauer	Geschwindkeit km/h 10	15,6	20
Momentaufnahme	0,1538	0,1538	0,1538
4,615	0,2032	0,2308	0,2525
9,231	0,2525	0,3077	0,3511

Tab. 3: Treff-Wahrscheinlichkeit mit dem Pulk, wenn K. V. auf die Straße tritt, während der Pulk auf der Straße ist

4 Verfeinerungen von Modell 2

In diesem Abschnitt gehen wir auf eine Verfeinerung von Modell 2 ein. Wir wollen uns von der Anzahl der Radfahrer, die sich in einem bestimmten Augenblick auf der Kaufingerstraße befinden, lösen.

4.1 Poisson-Prozess für die Radfahrer

Wir hatten Modell 2 darauf aufgebaut, dass n Radfahrer auf der Straße sind; alle wählen ihren Standort zufällig (mit einer Gleichverteilung über den Verlauf der Straße). Sie kommen daher in den Einsichtsbereich von K. V. (die plus/minus 10 Meter um ihn) mit Wahrscheinlichkeit $p = 20/260$. Wenn wir die Zahl der Radfahrer fixieren, haben wir es mit einer Bernoulli-Kette der Länge n zu tun.

Wir lösen uns nun von der Vorgabe der Anzahl der Radfahrer. Statt von fix vier auszugehen, setzen wir voraus, dass *im Durchschnitt* vier auf der Straße sind. Wir bezeichnen mit λ die Radfahrerdichte pro Meter Straße: λ_1 pro Meter beträgt bei vier Radfahrern (um mit Modell 2 vergleichbar zu sein) $\frac{4}{260}$. Der Poisson-Strom modelliert die Ereignisse in einer bestimmten Beobachtungseinheit (hier 1 m) und kann als *Verteilung des reinen Zufalls* der Ereignisse gelten. Die Voraussetzungen sind ähnlich der Binomialverteilung mit Ausnahme dessen, dass es nun keinen Takt der Experimente gibt. Es wird also nicht vier Mal ein Bernoulli-Experiment mit einer bestimmten Erfolgswahrscheinlichkeit durchgeführt und dann die Anzahl der Ereignisse bestimmt.

Zu den Annahmen des Poisson-Prozesses für die Radfahrer mit durchschnittlicher Anzahl von Ereignissen pro Beobachtungseinheit (Dichte) λ zählen:

1. Es ist egal, von wo aus der Poisson-Strom beobachtet wird (auch wann); es zählt nur die Beobachtungsdauer (bei uns 20 Meter).
2. Für kleine Beobachtungseinheiten ist die Wahrscheinlichkeit, zwei oder mehr Ereignisse (mindestens zwei Radfahrer) zu beobachten, klein und kann im Limes (Beobachtungseinheit gegen 0 m Länge) vernachlässigt werden.
3. Für ein Ereignis gilt asymptotisch, bei Verkleinerung der Beobachtungsdauer Δb, eine Wahrscheinlichkeit von $\lambda \cdot \Delta b$, d. h., pro Beobachtungseinheit eben λ, das ist die durchschnittliche Dichte (Intensität) von Radfahrern.
4. Beobachtet man auf disjunkten Abschnitten, dann sind die Ereignisse (Radfahrer) unabhängig voneinander.

Für die Anwendung muss man die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse pro Einheit schätzen oder anderweitig festlegen. Für mathematische Details zum Poisson-Prozess und die Deutung als Verteilung des reinen Zufalls siehe Wikipedia (o. D. c).

Die Anzahl der Ereignisse (Radfahrer) in einer Beobachtungseinheit von 1 m Straße ist dann, wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, Poisson-verteilt mit dem Parameter λ_1. Zeichnen wir ein Stabdiagramm dieser Verteilung für den gesamten Verlauf der Kaufingerstraße (260 m, das ist also eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 4 = 260 \cdot \lambda_1$), so sehen wir, dass nun die Anzahl der Radfahrer insgesamt stark variiert, mal ist nur einer, mitunter sind sogar sieben oder gar mehr Radfahrer auf der Straße (Abb. 11).

K. V. beobachtet einen Abschnitt von 20 m in diesem Poisson-Strom. Die Dichte auf diesem Abschnitt beträgt $\frac{4}{260} \cdot 20 = \frac{20}{65} =: \lambda_{20}$. Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ_{20} liefert eine Treff-Wahrscheinlichkeit von

$$p_4 = P(X > 0) = 1 - e^{-\lambda_{20}} \approx 0{,}2649.$$

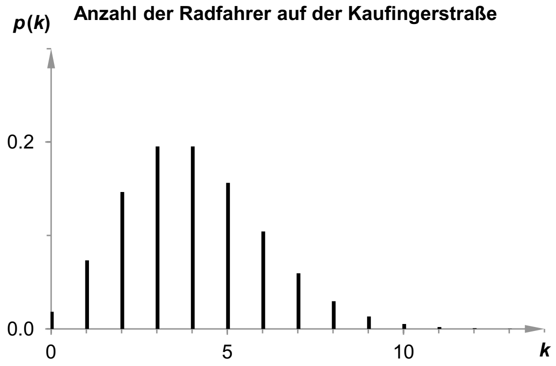

Abb. 11: Zufällige Anzahl der Radfahrer auf der Kaufingerstraße, wenn 4 Radfahrer erwartet werden

Dabei ist die Zufallsvariable X die Anzahl der Fahrräder, auf die Valentin trifft. Wir bezeichnen die Treff-Wahrscheinlichkeit mit p_4, weil wir von vier Radfahrern im Durchschnitt auf der Kaufingerstraße ausgegangen sind.

Nach dem Poisson-Modell ist die Wahrscheinlichkeit etwas kleiner als nach der Binomialverteilung in Modell 2, wo wir von vier Radfahrern ausgegangen sind. Man kann sich den Unterschied so veranschaulichen, dass man – sofern nun mehr als vier Radfahrer auf der Straße sind – gleich mehrere trifft; dagegen trifft man eher keinen, wenn weniger Radfahrer auf der Straße sind. Gezählt wird aber nicht, wie viele Radfahrer man trifft, sondern, ob man einen trifft oder eben nicht.

4.2 Variationen der Ausgangssituation

Wir haben in Zusammenhang mit Modell 1 verschiedene Variationen der Ausgangssituation betrachtet; darunter waren die Anordnung der Radfahrer in „zufälligen" Mustern (ungleichen Abständen), die Länge der Fahrräder, die Geschwindigkeit der Radfahrer sowie das Fahren in Gruppen.

Beim Fahren in „zufälligen" Mustern versuchten wir, die konstanten Abstände zwischen den Radfahrern zu variieren, sie nicht-systematisch bzw. zufällig erscheinen zu lassen. Das können wir in Modell 2 nicht mehr beeinflussen. Ohnehin haben die Radfahrer jetzt einen zufälligen Abstand voneinander. Der Abstand zwischen den Ereignissen ist im Poisson-Prozess nämlich exponentialverteilt (Beichelt & Montgomery 2003, S. 125). Gehen wir von den vier Radfahrern im Durchschnitt aus, so haben wir eine Radfahrerdichte von $\lambda_1 = \frac{4}{260}$ pro Meter. Im Durchschnitt (Erwartungswert) haben wir einen Abstand von 65 Metern. Mit Hilfe der Exponentialverteilung mit Parameter λ_1 rechnen wir etwa aus, dass ein Abstand von höchstens 8 m nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1158, von höchstens 20 m mit 0,2649 bzw. von höchstens 40 mit 0,4596 beobachtet wird (diese Wahrscheinlichkeiten sagen überhaupt nichts darüber aus, dass K. V. in so einem Falle dann auch tatsächlich einen der beiden Radfahrer trifft). Dass überhaupt kein Radfahrer auf der ganzen Kaufingerstraße ist (das entspricht einem Mindestabstand von mehr als 260 m), dafür beträgt die Wahrscheinlichkeit immerhin noch 0,0183.

Was die Länge der Fahrräder anbelangt, so ändert sich der Sichtbereich, sofern man die 10 m jeweils von den Fahrradenden rechnet, auf 21,8 m. Mit dem größeren Beobachtungsintervall steigt der Parameter auf $\frac{21{,}8}{65}$ und damit steigt die Treff-Wahrscheinlichkeit auf 0,2849.

Wenn der Radfahrerstrom deterministisch wie in Modell 1 angenommen wird, so hat es einen Sinn, zu analysieren, wie Pulks und Muster die Treff-Wahrscheinlichkeit ändern. Beides ist jetzt nicht mehr möglich, weil der Strom der Radfahrer jetzt stochastisch ist. Wir können allerdings festhalten, dass ein Pulk von zwölf Radfahrern von maximaler Länge von 20 Metern extrem unwahrscheinlich ist. Weil dies mathematisch zu komplex ist, können wir hierzu auf Simulation zurückgreifen. Es gilt nämlich im Poisson-Prozess, dass die n Zeitpunkte des Eintretens der Ereignisse unabhängig stetig gleichverteilt sind im Zeitraum $[0, t]$, wenn man voraussetzt, dass die Anzahl der Ereignisse mit n fixiert ist (Beichelt & Montgomery 2003, S. 128; der Beobachtungsraum ist bei uns räumlich statt zeitlich.)

Wir könnten daraus schließen, dass der Poisson-Prozess über den Tag mit unterschiedlicher Radfahrerdichte modelliert werden sollte. Es sollte ferner eine Mischung mehrerer Prozesse sein, damit man auch das Auftauchen größerer Gruppen mitberücksichtigt. Wir können daraus auch schließen, dass mit Modell 2 so enge Gruppen (mit 20 m Länge) schlecht erfasst werden.

Jetzt kommen wir noch zum Einfluss der Geschwindigkeit auf die Treff-Wahrscheinlichkeit. Wenn alle Radfahrer konstant mit 15,6 km/h fahren, so kommt auch ein Radfahrer, der zu Beginn der Beobachtung noch 30 m entfernt war, in 10 m Nähe und damit in den Sichtbereich, wenn die Dauer der Beobachtung 4,615 s ist (er legt in dieser Zeit genau 20 m zurück). Der Beobachtungsraum b vergrößert sich dadurch von 10 m auf beiden Seiten auf 10 plus 20 plus 10 m. Entsprechend bei Beobachtungsdauer von 9,230 s auf 10 plus 40 plus 10 m. Bei größeren Geschwindigkeiten entsprechend mehr. Die Länge des Sichtbereichs b bestimmt den Beobachtungsraum und damit den Parameter $\lambda_b = \lambda_1 \cdot b$ und die Treff-Wahrscheinlichkeit (siehe Tab. 4).

Beobachtungs-dauer	Geschwindigkeit km/h 10	15,6	20
	λ_b	λ_b	λ_b
Momentaufnahme	0,3077	0,3077	0,3077
4,615	0,5049	0,6154	0,7022
9,231	0,7022	0,9231	1,0966
	Treff-Wahrscheinlichkeit		
Momentaufnahme	0,2649	0,2649	0,2649
4,615	0,3965	0,4596	0,5045
9,231	0,5045	0,6027	0,6660

Tab. 4: Parameter der Poisson-Verteilung und Treff-Wahrscheinlichkeit für ausgewählte Geschwindigkeiten und Beobachtungsdauern

Die Beobachtungsdauer von 4,615 s ist auf die Geschwindigkeit von 15,6 km/h ausgerichtet. Die Momentaufnahme ändert die Treff-Wahrscheinlichkeit wie beim deterministischen Strom (Modell 1) nicht. Wir können uns in Tab. 4 orientieren, wie längere Dauer bzw. größere Geschwindigkeit ein Treffen wahrscheinlicher macht. Da mit Ausnahme des Werts 1,0966 Lambda immer mit der Treff-Wahrscheinlichkeit in Modell 1 übereinstimmt, sehen wir rasch, dass diese Werte durchwegs einiges unter jenen aus Modell 1 bleiben (Tab. 2).

5 Zufall und Wahrscheinlichkeit

Was haben wir bisher erreicht? Wie können wir allgemeine Überlegungen über den Zufall in unsere Modellierung einfließen lassen? Worin besteht überhaupt der Zufall?

5.1 Rückblick auf die Modellierung

Nach einer ersten sehr vereinfachten Modellierung der Ausgangslage (Karl Valentin betritt die Kaufingerstraße und trifft „zufällig“ einen Radfahrer) haben wir in verschiedenen Überlegungen zur Verbesserung der Ausgangsmodellierung gezeigt, wie sich je nach Modellannahmen (z. B. zur Anzahl und Verteilung der Radfahrer) eine Wahrscheinlichkeit für ein Treffen ausrechnen lässt. Je nach Annahmen ist diese Wahrscheinlichkeit recht unterschiedlich. Ohne es zu modellieren und auszurechnen, können wir hier anfügen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Flugzeug zu sehen, in der Zeit, als Valentin seine Stücke geschrieben hat, sehr gering war.

Helfen uns die Modellierungen nun zu entscheiden, wem wir in Hinblick auf das Streitgespräch zwischen Valentin und dem Kapellmeister eher recht geben? Und was können Schülerinnen und Schüler daraus lernen?

Mit den Modellierungen haben wir versucht, Wahrscheinlichkeiten für das diskutierte Ereignis zu quantifizieren. Diese Werte sagen jedoch nichts darüber aus, ob das Ereignis „zufällig“ stattfindet. Wenn zu einem Zeitpunkt x gerade y Radfahrer die Kaufingerstraße in München entlang fahren und Karl Valentin genau zu diesem Zeitpunkt die Straße betritt, trifft er mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit einen dieser Radfahrer. Nennen wir diesen (oder jeden anderen) Radfahrer Herrn Huber. Wenn wir wissen wollen, ob der Zufall hier eine Rolle spielt (bzw. welche Rolle er spielt), müssen wir genauer wissen, weshalb Herr Huber (und alle anderen Radfahrer) genau zu diesem Zeitpunkt hier radelt (bzw. radeln). Ist er beruflich oder privat mit einem bestimmten Ziel unterwegs? Hat er einen Termin? Radelt er aus Freude am schönen Wetter einfach so durch München? Weshalb fährt er dann genau zu diesem Zeitpunkt durch die Kaufingerstraße? Zufall erscheint hier also als Koinzidenz, das heißt als Zusammentreffen zweier isolierter Ereignisse (vgl. Döhrmann 2004, S. 26). Es passiert ohne Absicht.

All diese Fragen müssen unbeantwortet bleiben, weil wir – den sicher mittlerweile längst verstorbenen – Herrn Huber nicht befragen können. Es bleibt also offen, ob er an diesem Tag zu diesem Zeitpunkt zufällig oder aufgrund von nur ihm bekannten Motiven an dieser Stelle Rad gefahren ist.

Man kann sich auch fragen, ob es eine offizielle Fassung gibt, wie Zufall zu verstehen ist. Da können wir nur antworten, das hängt von der mathematischen Modellierung ab. Selbst das Modell des rein zufälligen Auftretens von Ereignissen (der Poisson-Prozess) bietet nur eine Teillösung, weil sie dem Wesen des Zufalls nichts vorschreiben kann. Als besonderes Merkmal dieses Prozesses, welches diese Einschätzung als reiner Zufall stützt, gilt, dass – bei feststehender Anzahl von Ereignissen in einer Beobachtungseinheit – die (zeitliche oder räumliche) Verteilung der Ereignisse unabhängig voneinander gleichverteilt ist.

Damit kann man über dieses Modell seine sekundären Intuitionen über den Zufall und seine Ausprägungen schärfen. Doch auch dieses Modell hat paradox empfundene Züge. Die Wartezeit auf das nächste Ereignis ist nämlich exponentialverteilt und hat als solche die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit. Das bedeutet, die künftige Wartezeit ist zu jedem Zeitpunkt unabhängig davon, wie lange man schon gewartet hat. Hierin wird deutlich, dass Mathematiker und Mathematikerinnen ein Modell des reinen Zufalls anbieten, das aber Eigenschaften hat, die einem naiven Vorverständnis von Zufall nicht entsprechen. Außerdem löst die mathematische Herangehensweise keineswegs das substantielle Problem, was denn Zufall in der Wirklichkeit eigentlich bedeutet.

5.2 Ausblick: Was ist nun Zufall?

Wenn wir nun auf die Ausgangsfrage zurückkommen, wenden wir uns der Position von Karl Valentin zu: Zufall ist das Zusammentreffen zweier Ereignisse ohne einen kausalen Zusammenhang. Im Unterschied zu der des Kapellmeisters – Zufall ist etwas, was selten oder unerwartet eintritt – können wir sie nicht mit den Mitteln des Mathematikunterrichts genauer untersuchen.

Zufall hat philosophisch gesehen viele Facetten. Allerdings blenden Mathematiker diese Vielfalt und die damit verbundenen vagen Ideen gerne aus, wenn sie sich mit Modellen für Zufallsvorgänge – also mit dem Zufall – befassen. Dementsprechend gibt es über Borovcnik (2008; 2011) hinaus nur wenige mathematische oder fachdidaktische Arbeiten, die sich mit dem Wesen des Zufalls befassen. Das überlässt man populärwissenschaftlichen Artikeln wie dem Dossier der ZEIT 1/2017 (Henk 2017).

Wenn im Mathematikunterricht über „Zufall" diskutiert wird, öffnet sich die Tür zu fächerübergreifendem Unterricht, zur Kooperation mit Philosophie und Religion. Das ist umstritten. Nicht selten wird argumentiert wie es ein Gutachter zu unserem Text geschrieben hat:

> „Aufgrund der sehr unterschiedlichen Bedeutungen des Wortes Zufall kann seine Verwendung in der Kommunikation zwischen Personen zu Missverständnissen führen. Für den Stochastikunterricht bedeutet dies aus meiner Sicht, möglichst auf das Wort Zufall in fachlichen Zusammenhängen zu verzichten."

Wir teilen diese Position nicht: Wenn die Assoziation der Lernenden beim Stochastikunterricht häufig der Begriff „Zufall" ist, muss sich der Unterricht dessen annehmen. In vielen Fällen, in denen es um das persönliche Schicksal von Menschen geht, wird die Frage nach dem „Zufall" sehr nachdrücklich gestellt. Für die Lehrenden gilt es, diese Bedeutungsvielfalt einigermaßen abzuklären, damit der Stellenwert der stochastischen Modelle besser eingeordnet (und akzeptiert) werden kann.

Borovcnik (2011) unterscheidet drei Begriffspaare, mit denen Zufall in Verbindung gebracht wird:

- Zufall – Divination;
- Zufall – Kausalität;
- Zufällige Entwicklung – Kreationismus.

Schon das paradigmatische Zufallsexperiment des Münzwerfens ist eigentlich ein physikalisches Experiment; ein geeigneter Münzwurfapparat würde immer dasselbe werfen (je nach Einstellung immer Kopf oder immer Zahl). Das deutet schon darauf hin, dass Zufall aus Sicht der Modellbildung eigentlich eine Frage der Sichtweise ist. Wenn man gerade an einer Normierung des Münzwerfens NICHT interessiert ist, wenn man genügend äußerliche Bedingungen offen lässt (also nicht kontrolliert), so erhält es mehr und mehr Sinn, den Münzwurf als Zufallsexperiment zu interpretieren.

Zufall mag u. a. folgende Konnotationen haben:

- Ist nicht (exakt) vorhersehbar – fehlende Kontrolle über die Zukunft.
- Hat keine besonderen Ursachen, die das Auftreten des Ereignisses erklären können.
- Ist das Zusammentreffen (Koinzidenz) mehrerer Ereignisse ohne besondere Ursachen.
- Ermöglicht eine faire Entscheidung (das Los ziehen) und enthebt andererseits von der Verantwortlichkeit für die Entscheidung. Eine Entscheidung per Zufall überlässt den Lauf der Dinge „höheren" Mächten, die es besser wissen (Divination).
- Nicht zu kleine bzw. nicht zu große Wahrscheinlichkeit: eine zu große Wahrscheinlichkeit kommt der Sicherheit nahe und mag als nicht-zufällig empfunden werden. Eine zu kleine Wahrscheinlichkeit lässt nach anderen – besonderen – „Ursachen" forschen (wenn etwa der p-Wert einer Null-Effekt-Hypothese klein genug ist, „anerkennt" man einen Effekt).

Interessant mag aber auch sein, wie *wir* Zufall und zufällig *in dieser Arbeit* verwendet haben.

- *Umgang mit Zufall im Sinne des Unerwarteten und sehr selten Auftretenden, sehr Unwahrscheinlichen*
  Wenn Valentin hingegen gerade von einem Flieger gesprochen hätte […] wirklich ein Zufall, weil ein (damals) seltenes Ereignis (S. 2).
  … wird man vielleicht von einem „dummen Zufall" (im Sinne des Unerwarteten) sprechen (S. 3).
  … mitten in einer Wüste, einen oder gar viele Menschen zu treffen (S. 3).
  Situationen …, die entweder zufällige (im Sinne von seltene oder unerwartete) oder aber nachvollziehbare Koinzidenzen nach sich ziehen (S. 3).
- *Zufällig im Sinne des Unerwarteten aber durchaus nicht sehr Unwahrscheinlichen*
  Das Ereignis (Treffen eines Radfahrers mit $p_1 = 0{,}3077$) mag zwar unerwartet sein, aber seine Wahrscheinlichkeit ist nicht klein! (S. 5)
  … dass es kein Zufall im Sinne von unerwartet oder selten ist, wenn Karl Valentin einen Radfahrer trifft (S. 9).

- *Zufällig im Sinne von zufällige Auswahl, bei der alle Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind*
  … da unser Punkt zufällig gewählt wird (S. 4).
  „zufällige“ Anordnung … nicht systematisch, „ohne jede Absicht“ (S. 7).
- *Zufällig als Gegensatz zu sicher*
  … ist es sicher, dass Karl Valentin auf einen Radfahrer trifft (S. 6).
  … damit eine Begegnung auf jeden Fall stattfindet (d. h., von einem Wirken des Zufalls unabhängig ist) (S. 6 f.).
- *Kein Zufall, wenn das Ereignis sehr wahrscheinlich ist*
  … ein ununterbrochener Strom von Radfahrern …, ist es nahezu sicher, dass (S. 3).
  Wenn „viele Tausend“ … unterwegs sind, ist es sehr wahrscheinlich (in diesem Sinne kein Zufall), dass Karl Valentin einen trifft (S. 7).
- *Je kleiner die Wahrscheinlichkeit, desto zufälliger das Ereignis*
  … von der mehr oder weniger großen Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammentreffens … je mehr Radfahrer …, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, einem zu begegnen und desto weniger „zufällig“, dass man einem begegnet (S. 3).
- *Zufall als etwas ohne Grund, ohne Absicht Eintretendes*
  Hat Herr Huber einen Termin? Oder radelt er aus Freude? (S. 13).
- *Zufall als etwas, was keine Ursache hat oder dessen Ursache nicht bekannt ist*
  Dass ein Ereignis zufällig eintritt, wenn es dafür keine ersichtlichen Gründe gibt (S. 2 f.).
  Zusammentreffen (Koinzidenz) mehrerer Ereignisse ohne besondere Ursachen (S. 14).
  Ursache von Krankheiten; ob der Tumor tatsächlich zufällig (d. h., die Ursache ist unbekannt) entstanden ist (S. 15).
- *Zufall als etwas objektiv Existierendes*
  Unschärferelation in der Quantenmechanik (S. 16).

5.3 Zufall im Unterricht

Nun folgen einige Beispiele, die auch im Unterricht verwendet werden können. Im Dossier über den Zufall in der Wochenzeitschrift DIE ZEIT 1/2017 wird ein Fall von Hirntumor beschrieben. Der behandelnde Arzt erläutert dem ZEIT-Mitarbeiter dazu (vgl. Henk 2017): Wenn er in seinem Chefarztzimmer ein „Ich-habe-schlechte-Nachrichten-für-Sie-Gespräch“ führt, dann ist es ihm wichtig, die Rolle des Zufalls zu betonen. Er hat sich sogar einen Begriff ausgedacht: „negativer Lotteriegewinn“. Er hofft darauf, dass sich seine Patienten nicht mit der Frage nach dem „Warum?“ foltern, wenn er ihnen erklärt, dass sie schlicht sehr, sehr viel Pech haben. Und er weiß: In den allermeisten Fällen hofft er umsonst. Die meisten Patienten suchen nach Ursachen wie z. B. Handystrahlung oder Umweltbelastungen.

So einen Fall im Mathematikunterricht zu behandeln ist nicht nur wegen der damit verbundenen emotionalen Aspekte durchaus anspruchsvoll. Wir können weitaus weniger als der Arzt beurteilen, ob der Tumor tatsächlich zufällig (d. h., die Ursache ist unbekannt) entstanden ist. Vielleicht weiß ein Arzt in 200 Jahren mehr über mögliche Ursachen, die heute noch nicht erforscht und diagnostizierbar sind. So, wie vor 200 Jahren Viren als Krankheitsverursacher nicht bekannt waren: „Es ist nicht möglich zu zeigen, dass ein Phänomen sich wirklich völlig gesetzlos verhält.“ (Döhrmann 2004, S. 28). Wenn wir dem Hinweis des Arztes folgen, können wir im Unterricht darauf hinweisen, dass es im Leben Zufälle gibt, die gut oder schlecht für uns wirken können – und über die Brücke zur allgemeinen Fragestellung nach Determinismus, Gottes Wille oder Schicksal gehen.

Wer im Zusammenhang mit der Grundfrage nach Zufall oder Bestimmung nach dem Willen Gottes fragt, wird auf Berichte über das schreckliche Erdbeben in Lissabon (ausgerechnet am Allerheiligentag des Jahres 1755) stoßen, das sehr viele Menschenleben forderte, die meisten Kirchen und Paläste zerstörte, nicht aber das Rotlichtviertel (Wikipedia o. D. d). „Kann das Gottes Wille sein?“ fragten sich viele gläubige Menschen. Wenn es ihn gibt und er tatsächlich allmächtig ist, wie kann so etwas geschehen? Die Frage bleibt relevant und des Diskutierens würdig, auch wenn heute über die Ursachen von Erdbeben mehr bekannt ist als im 18. Jahrhundert.

Im Unterricht können natürlich auch weniger emotional fordernde Beispiele diskutiert werden. Hier ein paar Vorschläge (vgl. Döhrmann 2004, S. 201 ff.):

i. Ein Mann überlebt sieben Blitzschläge (Roy C. Sullivan, siehe Wikipedia o. D. e).

ii. In unserer Klasse haben zwei am selben Tag Geburtstag.

iii. Bei 2601 Ziehungen beim Lotto „6 aus 45“ in Österreich kam 398-mal die Zahl „43“, aber nur 311-mal die Zahl „33“ (Stand: 13.2.2017; 6Richtige.at o. D.).

iv. Meine Reise nach Mauritius und zurück ist gut verlaufen.

Ereignis i. ist unerwartet und unvorhergesehen, zudem ist es als Naturereignis (Blitzeinschlag und körperliche Konstitution des Mannes) unbeeinflussbar.

Ereignis ii. ist ein Klassiker der Stochastik, das Geburtstagsparadoxon (vgl. z. B. Henze 2010, S. 71 f.). Bei mehr als 22 Personen ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis größer als $\frac{1}{2}$, wenn man voraussetzt, dass alle 365 Tage eines Jahres gleichwahrscheinlich für einen Geburtstag sind. Hier tritt ein interessanter Gesichtspunkt hinzu: natürlich ist die Gleichverteilung aller Tage im Jahr unzutreffend, besonders wenn man die Geburtenjahrgänge einschränkt (etwa an Sonntagen gibt es weniger Geburten; auch sind die Geburten jahreszeit-abhängig). Aus dem Modell jedoch erhält man eine untere Schranke für das Zusammentreffen von Geburtstagen (Borovcnik 1985).

Ereignis iii. kann mit Hilfe eines Streubereichs für die absolute Häufigkeit des Auftretens bestimmter Gewinnzahlen beim Lotto beurteilt werden (Götz 2013, S. 142): [302, 392] (nach „außen“ gerundet) ist der 99 %-Streubereich für die absolute Häufigkeit X, wobei X binomialverteilt ist mit den Parametern $n = 2601$ und $p = \frac{6}{45}$. Das Auftreten der Gewinnzahl 43 ist also in diesem Lichte zunächst auffällig, das von 33 dagegen nicht. Allerdings muss man den Zufallsvergleich genauer präzisieren: wir warten ja nicht darauf, dass die 43 so häufig auftritt. Es hat sich nur im Nachhinein herausgestellt, dass die häufigste Zahl in den bisherigen Ziehungen die 43 ist. Das bedeutet, dass man die Verteilung der Anzahl bestimmen muss, die von der häufigsten Zahl erreicht worden ist. Auch hier hilft die wiederholte Simulation aller bisherigen Ziehungen, um einzusehen, dass das Auftreten der häufigsten Zahl die Anzahl 392 locker überschreitet.

Ereignis iv. schließlich kann mit „Glück“ beschrieben werden, oder aber auch mittels statistischer Daten untermauert werden (Mauritius gilt als sicheres Reiseland, siehe Bundesministerium für Europa, Integration und Äußeres o. D.). Abhängig vom Standpunkt ist es unbeeinflussbar oder nicht.

Als „zufällig“ werden im Alltag auch Ereignisse bezeichnet, die selten auftreten, die nicht verstehbar sind, willkürlich erscheinen, deren Auftreten außergewöhnlich ist. Persönlich nicht beeinflussbare Risiken wie drohende Naturkatastrophen oder Einwirkungen von anderen (unverschuldeter Verkehrsunfall, Bahnunglück) werden oft überschätzt, zufallsbedingte Risiken, die mit dem eigenen Verhalten zusammenhängen, dagegen eher unterschätzt (Tietze u. a. 2002, S. 146).

Bis zu diesen Beispielen kann im Unterricht der Eindruck entstehen, dass Zufall eigentlich ein Mangel an Wissen ist. Wer allwissend ist (Gott), kennt demnach keinen Zufall.

Ist es schon schwierig genug, Zufall im Alltag brauchbar zu identifizieren und mit stochastischen Modellen adäquat aufzuarbeiten, so besteht eine noch größeres Manko an Kompetenzen, sich vorzustellen, wie sich Zufall – wenn es denn ihn schon gäbe – in der Wirklichkeit ausprägen würde, wie Experimente u. a. von Engel & Sedlmeier (2004) oder Borovcnik (2008) zeigen.

Epilog

Im Gegensatz zu der thematisierten Unvorhersehbarkeit (Karl Valentin und Radfahrer Huber wissen nichts voneinander) oder dem Arztbeispiel von eben existiert der Zufall auch als „wesensmäßig unvorhersehbar“ (Döhrmann 2004, S. 26) in der Quantenmechanik (Zufall als etwas objektiv Existierendes). Auf die Frage *„Weiß man einfach noch nicht genug oder gewöhnt man sich an die Verrücktheit der Quantenwelt?“* antwortet der Physiker Anton Zeilinger (Universität Wien 2015):

> „So leicht würde ich es mir nicht machen. Wenn man das als ein Noch-Nicht-Wissen darstellt, dass man einfach noch nicht schlau genug ist, das zu durchschauen, führt das zu einem falschen Bild. Die Quantenphysik widerspricht schon Grundkonzeptionen.“

Und weiter auf die Frage *„Etwa der Tatsache, dass es einen Zufall gibt?“* fährt er fort:

> „Genau, und dass das wirklich ein reiner Zufall ist und nicht einfach die Ursache unbekannt ist, weil wir nicht genug wissen. Es ist falsch zu glauben, dass das, was wir jetzt messen oder beobachten, schon mit seinen Eigenschaften existiert hat, bevor wir diese messen. Die Annahme, dass diese Speisekarte hier rot war, bevor das irgendjemand beobachtet hat, ist falsch. Das ist nicht nur gegen den gesunden Menschenverstand, da geht es um grundsätzliche Annahmen über die Natur der Welt.“

Das zeigt, wenn der Begriff des Zufalls im Unterricht thematisiert wird, dann muss das Vorverständnis der Schüler und Schülerinnen (vgl. Abschnitt 2.3.4.1 in Tietze u. a. 2002) und die Bedeutungsvielfalt des Begriffs berücksichtigt werden. „Die strikte Trennung von deterministischen und zufälligen Phänomenen soll aufgehoben werden.“ (Döhrmann 2004, S. 61). Dieser Standpunkt kann durch unterschiedliche Szenarien wie eben angedeutet von Schülern und Schülerinnen selbst erarbeitet werden.

Wir danken den Gutachtern bzw. Gutachterinnen für wertvolle Hinweise zur Präzisierung unserer Ideen.

Literatur

6Richtige.at (o. D.): Statistik Häufigkeit Lottozahlen. Wie oft wurde jede Zahl gezogen? www.6richtige.at/at_zahlen_gesamt.html (Zugriff: 13.2.2017).

Adorno, T. W. (1971): Erziehung zur Mündigkeit. Berlin: Suhrkamp.

Bayerischer Rundfunk (2011): Karl Valentin. Die Orchesterprobe (1933). Ausschnitt. Die Sache mit dem Zufall. www.br.de/br-fernsehen/import/audiovideo/valentin-die-orchesterprobe-zufall100.html (Zugriff: 15.8.2017).

Beichelt, F. E.; Montgomery, D. C. (Hrsg.) (2003): Teubner-Taschenbuch der Stochastik: Wahrscheinlichkeitstheorie, Stochastische Prozesse, Mathematische Statistik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Borovcnik, M. (1985): A note on the birthday problem. In: A. Bell; B. Low; J. Kilpatrick (Eds.): *Theory, research and practice in mathematical education.* Nottingham: Shell Centre for Mathematical Education, S. 325–330. wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/Boro/Papers/P_85_Borovcnik_Birthday_problem (Zugriff: 15.8.2017).

Borovcnik, M. (2008): Wenn einem der Zufall zufällt – ist das kein Zufall? Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice 3, Wien, 16.–18.5. wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/Boro/Papers/V_08_Wenn_einem_der_Zufall_zufällt (Zugriff: 15.8.2017).

Borovcnik, M. (2011): Strengthening the Role of Probability within Statistics Curricula. In: C. Batanero; G. Burrill; C. Reading; A. Rossman (Eds.): *Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* New York: Springer, S. 71–84.

Bundesministerium für Europa, Integration und Äußeres (o. D.): Reiseinformation. Mauritius. www.bmeia.gv.at/reise-aufenthalt/reiseinformation/land/mauritius/ (Zugriff: 15.8.2017).

Deiss, R. (2011): Kommt Zeit, kommt Rad. Kleine Geschichte und interessante Fakten zur Entwicklung des Fahrradverkehrs. 5. Auflage. Norderstedt: Books on Demand GmbH.

Döhrmann, M. (2004): Zufall, Aktien und Mathematik. Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Eichler, A.; Vogel, M. (2013): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer.

Engel, J.; Sedlmeier, P. (2004): Zum Verständnis von Zufall und Variabilität in empirischen Daten bei Schülern. In: *Unterrichtswissenschaft*, 32, S. 169–191.

Fischer, R.; Malle, G. (Mitarbeit H. Bürger) (1985): Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Götz, S.; Reichel, H.-C. (Hrsg.) (2010, 2011, 2013): Mathematik 6 bis 8 von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.

Henk, M. (2017): Alles Zufall? Zeit/Online 01/2017. www.zeit.de/2017/01/wahrscheinlichkeit-zufall-unberechenbar-fragen (Zugriff: 13.2.2017).

Henze, N. (2010): Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls. 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Kettler, D. (o. D.): Historisches, oder: „Damals war alles besser“. Recht für Radfahrer. recht-für-radfahrer.de/Historisches.html (Zugriff: 15.8.2017).

Krüger, K.; Sill, H.-D.; Sikora, C. (2015): Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer.

Maaß, J. (2015): Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts. „Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik“. Münster: WTM.

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (Hrsg.) (2002): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3: Didaktik der Stochastik von H. Wolpers unter Mitarbeit von S. Götz. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

tz-online (2014): Innenstadt: Hier geht es in München am meisten zu. www.tz.de/muenchen/stadt/altstadt-lehel-ort43327/fussgaengerzone-7000-passanten-stunde-tz-3665972.html (Zugriff: 15.8.2017).

Universität Wien (2015): Quantenphysiker Anton Zeilinger wird 70. Medienportal. medienportal.univie.ac.at/uniview/wissenschaft-gesellschaft/detailansicht/artikel/quantenphysiker-anton-zeilinger-wird-70/ (Zugriff: 15.8.2017).

Valentin, K. (1977): Tingel-Tangel. München: Piper.

Wikipedia (o. D. a): Einwohnerentwicklung von München. de.wikipedia.org/wiki/Einwohnerentwicklung_von_M%C3%BCnchen (Zugriff: 15.8.2017).

Wikipedia (o. D. b): Liste der Volkszählungen in Deutschland. de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Volksz%C3%A4hlungen_in_Deutschland (Zugriff: 15.8.2017).

Wikipedia (o. D. c): Poisson-Prozess. de.wikipedia.org/wiki/Poisson-Prozess (Zugriff: 15.8.2017).

Wikipedia (o. D. d): Erdbeben von Lissabon 1755. de.wikipedia.org/wiki/Erdbeben_von_Lissabon_1755 (Zugriff: 15.8.2017).

Wikipedia (o. D. e): Roy C. Sullivan. de.wikipedia.org/wiki/Roy_C._Sullivan (Zugriff: 15.8.2017).

Anschriften der Autoren:

Manfred Borovcnik
Institut für Statistik, Universität Klagenfurt
Universitätsstraße 65, 9020 Klagenfurt, Österreich
manfred.borovcnik@aau.at

Stefan Götz
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Oskar Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Österreich
stefan.goetz@univie.ac.at

Jürgen Maaß
Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Linz
Altenberger Straße 69, 4040 Linz, Österreich
juergen.maasz@jku.at