Ein Spiel mit zwei Würfeln[1]

COLIN FOSTER UND DAVID MARTIN, NOTTINGHAM, ENGLAND

[1] Original: Two-dice horse race.
In *Teaching Statistics* 38 (2016) 3, 98–101.
Kürzung, Bearbeitung und Übersetzung: JÖRG MEYER

Zusammenfassung: *Zwei Würfel werden wiederholt geworfen. Gleichzeitig gibt es Spielpferde mit den Nummern 2, 3, …, 12. Die Augensumme gibt an, welches Pferd einen Zug vorwärts tun darf. Dies Spiel wird analysiert.*

1 Einleitung

Das in der Zusammenfassung beschriebene Spiel wird so oft wiederholt, bis eines der Spielpferde eine Ziellinie erreicht hat, die etwa 10 Einheiten von der Startlinie entfernt ist. Der Abstand zwischen Start- und Ziellinie soll *Weglänge* heißen. Schülerinnen und Schüler spielen dieses Spiel gerne und stellen fest, dass das Pferd Nr. 7 meistens die besten Chancen zu gewinnen hat. Dadurch sind die Lernenden motiviert, die Wahrscheinlichkeiten für jedes Pferd auszurechnen. Manche Lernenden schließen aus der Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit, als Augensumme eine „7" zu bekommen, 1/6 beträgt, dass dann auch die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für Pferd Nr. 7 1/6 betragen müsse. Dies führt zu verschiedenen Fragen, von denen manche durch Simulation gelöst werden können, so etwa: Wie groß ist die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Pferd, und wie hängt diese Wahrscheinlichkeit von der Weglänge ab? Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten ist schwierig, so dass es als sinnvoll erscheint, das Spiel etwas zu vereinfachen.

2 Einfachere Rennen

Wir haben nur zwei Pferde (A und B). Bei jedem Wurf bewegt sich A mit Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ einen Schritt vorwärts und B mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$.

Bei Weglänge 2 kann A in 2 oder in 3 Schritten gewinnen; die Gewinn-Wahrscheinlichkeit beträgt $p^2 + 2 \cdot p^2 \cdot q = p^2 \cdot (3 - 2 \cdot p)$, wie man etwa mit Hilfe eines Baumdiagramms leicht feststellt. Dieser Wert ist größer als p.

Bei Weglänge 3 kann A in 3, 4 oder 5 Schritten gewinnen, und wieder lässt sich die Gewinn-Wahrscheinlichkeit ermitteln.

Man kann auch die Anzahl der Pferde erhöhen, wieder beginnend mit der Weglänge 2.

3 Zurück zum Originalspiel

Selbst für eine Weglänge 2 ist es schwierig, bei 11 Pferden die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für etwa Pferd Nr. 7 auszurechnen, da es ja zu berücksichtigen gilt, was all die anderen Pferde tun. Letztere bewegen sich um 0 Einheiten oder um 1 Einheit, und zwar alle mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten. Der Anhang gibt Hinweise für die Berechnung.

Es ist eine sinnvolle Frage, wie viele Schritte (bzw. Würfe) ein spezielles Pferd zum Gewinnen braucht. Bei einer Weglänge von 2 ist diese Anzahl mindestens 2 und höchstens 12. Das Maximum wird erreicht, wenn alle anderen 10 Pferde einen Schritt vorwärts tun und das gewinnende Pferd zwei.

Wenn die Anzahl der Pferde h beträgt (Pferd Nr. 1 wird natürlich nicht mitgezählt) und wenn die Weglänge w ist, bekommt man die maximale Anzahl an Würfen, wenn alle Pferde außer dem Gewinnpferd $w - 1$ Schritte gemacht haben und das Gewinnpferd einen mehr. Also beträgt die maximale Anzahl der Schritte $h \cdot (w - 1) + 1$.

Da die rechnerische Behandlung des Originalspiels als kompliziert erscheint, ist es naheliegend, die gewünschten Wahrscheinlichkeiten durch Simulationen approximativ zu erhalten.

Wir haben eine Simulation in Excel implementiert, deren Makro unter http://www.foster77.co.uk/Horse%20race%20simulation.xlsm abrufbar ist. Die Datei ist nicht geschützt und enthält extensive Kommentare, damit Lernende und Lehrende sie ggf. weiterentwickeln können. Das Spiel wurde 1.000.000-mal für verschiedene Weglängen simuliert, wobei jede Simulation einige Male wiederholt wurde, so dass die Ergebnisse auf drei Nachkommastellen konsistent waren (Tabelle 1). Man kann in Abb. 1 sehen, dass die Verteilung bei Pferd Nr. 7 bei zunehmender Weglänge immer spitzer wird.

Für die Weglänge 10 beträgt die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für Pferd Nr. 7 etwa 0,42, was deutlich größer als 1/6 ist.

4 Schlussfolgerung

Für die Erklärung, dass Pferd Nr. 7 so häufig gewinnt, ist die hohe Anzahl der Summanden von 7 nur ein kleiner Teil der Geschichte; die Weglänge spielt ebenfalls eine wesentliche Rolle.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.028	0.009	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.056	0.034	0.021	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
4	0.083	0.069	0.057	0.047	0.039	0.032	0.027	0.023	0.019	0.016
5	0.111	0.113	0.110	0.105	0.099	0.093	0.088	0.083	0.078	0.074
6	0.139	0.164	0.179	0.187	0.193	0.197	0.199	0.201	0.201	0.202
7	0.167	0.221	0.261	0.293	0.320	0.343	0.363	0.382	0.399	0.415
8	0.139	0.164	0.179	0.187	0.193	0.197	0.199	0.201	0.201	0.202
9	0.111	0.113	0.110	0.105	0.099	0.094	0.088	0.083	0.078	0.074
10	0.083	0.069	0.057	0.047	0.039	0.032	0.027	0.023	0.019	0.016
11	0.056	0.034	0.021	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
12	0.028	0.009	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tab. 1: Wahrscheinlichkeit für jedes Pferd (nach unten angetragen), bei einer bestimmten Weglänge (nach rechts angetragen) zu gewinnen

Auch Spielszenarien, die auf den ersten Blick als einfach erscheinen, können in Wirklichkeit deutlich komplizierter zu analysieren sein.

5 Anhang

Das Spiel lässt sich durch einen Markov-Prozess beschreiben. Es sei $X_n = (x_2, x_3, \ldots, x_{12})$ mit n als Anzahl der bisher erfolgten Würfe und mit x_k als Stelle des k-ten Pferdes nach n Würfen. Zu Beginn ist $X_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Nach einem Wurf wird sich einer der Einträge in dem Vektor um 1 erhöhen. Wird etwa zuerst die Augensumme „4“ geworfen, so ist $X_1 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$. Man bekommt dadurch eine Folge von Vektoren $X_1, X_2, X_3, \ldots$ und damit eine vektorwertige Markov-Kette. Nun sei p_j die Wahrscheinlichkeit, dass das j-te Pferd einen Schritt vorwärts tun darf, d. h. dass die Augensumme den Wert j hatte. Auf diese Weise bekommt man die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette, d. h. wie wahrscheinlich es ist, von einem speziellen Zustand zu einem andern speziellen Zustand zu gelangen. Fast alle Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen sind 0. Das Spiel endet, wenn einer der Einträge im Vektor den Wert 10 erreicht. Die Theorie der Markov-Ketten liefert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Zustand erreicht wird. Jedoch machen die Rechnungen einen abschreckenden Eindruck, da der Zustandsraum riesengroß ist (etwa 10^{11} Zustände).

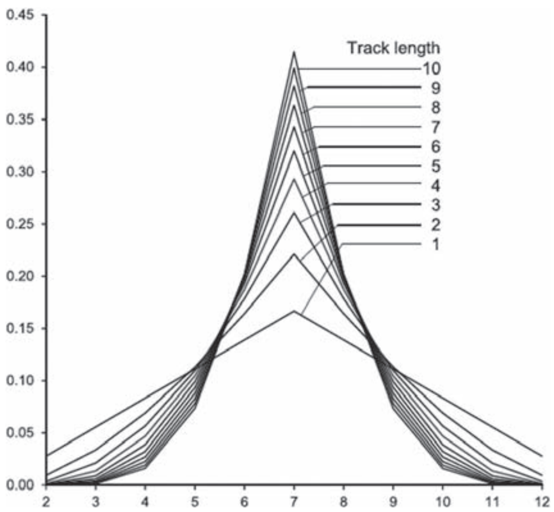

Abb. 1: Die Wahrscheinlichkeit für jedes Pferd (nach rechts angetragen), bei unterschiedlichen Weglängen (track length) zu gewinnen

Danksagung

Die Autoren danken Philip O’Neill für den Inhalt des Anhangs.

Literatur

Foster, C. (2012): A straight question. In *Mathematics in School*, 41(4), 31–34.

Anschrift der Verfasser

Colin Foster/David Martin
School of Education, University of Nottingham, Nottingham, England
colin.foster@nottingham.ac.uk
d.martin@virginmedia.com