Einfache Wartezeitprobleme

Christian Dorner, Wien

Zusammenfassung: *In diesem Aufsatz werden ausgehend von dem einfachen Wartezeitproblem von Götz (2016) weitere elementare Wartezeitprobleme vorgestellt, die stets einfache Abwandlungen der ursprünglichen Problemstellung sind. Dabei wird versucht, die von Götz (2016) verwendete Methode der geometrischen Reihe und ihren Derivaten sowohl auf Spezialfälle als auch auf Verallgemeinerungen anzuwenden. Abschließend werden noch Möglichkeiten zur Vermeidung der Ableitungen exemplarisch erläutert.*

1 Einleitung

Götz (2016) formulierte zusammengefasst folgendes Problem:

> *Problemstellung 1:* „Man addiere Zufallsvariablen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ nur die Werte 0 und 1 annehmen, solange, bis die Summe größer 1 ist. Wie lange muss man im Durchschnitt warten?"

Der zuvor genannte Autor führte die Zufallsvariable X ein, welche die Anzahl der notwendigen Summanden beschreibt, damit die kumulierte Summe den Wert 1 erstmals übersteigt. Im Anschluss berechnete er unter Verwendung der geometrischen Reihe und ihren Derivaten unter anderem den Erwartungswert und die Varianz und zeigt so, dass die einfache geometrische Reihe, die auch im Schulunterricht eine zentrale Rolle spielt, ein mächtiges Instrument ist.

Nach Götz (2016) werden auf lange Sicht durchschnittlich 4 Summanden gebraucht, bis die Summe größer 1 ist. Für die Standardabweichung der Zufallsvariablen X berechnete er den Wert 2, siehe Götz (2016), S. 17.

2 Verallgemeinerung des einfachen Wartezeitproblems

Wie mächtig die geometrische Reihe tatsächlich ist, lässt sich daran erkennen, dass sie bei einer Verallgemeinerung des obigen Problems genau so ihre Verwendung findet wie im Spezialfall.

Das Problem wird nun dahingehend verändert, dass die Werte 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit p und $1-p$ auftreten. Die Verteilung von X ist eben so schnell gefunden, wie bei Götz (2016), S. 16. Alsbald bei diesem Wartezeitproblem zweimal der Wert 1 auftaucht, endet der Warteprozess. Für eine Wartezeit X von n Zufallszahlen erhält man:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n) &= \binom{n-1}{1}\cdot(1-p)\cdot p^{n-2}\cdot(1-p) = \\ &= (n-1)\cdot(1-p)^2\cdot p^{n-2}.\end{aligned}$$

Damit der Warteprozess an der n-ten Stelle abbricht, muss der Ausfall der n-ten Zufallszahl 1 sein. Davor darf nur eine der $n-1$ Zufallsvariablen den Wert 1 annehmen, dafür gibt es $\binom{n-1}{1} = n-1$ Möglichkeiten.

2.1 Erwartungswert und Varianz

Wie lange muss man im Durchschnitt warten und wie verändert sich diese durchschnittliche Wartezeit, wenn die Wahrscheinlichkeit p verändert wird? Intuitiv müsste der Erwartungswert immer größer werden, umso größer p wird, da das Auftreten der 0 immer wahrscheinlicher wird. Die Berechnung des Erwartungswerts gibt Aufschluss. Zuvor sei aus Gründen der Vollständigkeit noch an die ersten drei Ableitungen der Funktion f mit $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$ erinnert. Diese werden für die kommenden Berechnungen benötigt. Es sei angemerkt, dass im Folgenden die Startwerte der Summen so gewählt wurden, dass nur positive Summanden vorkommen. Die erste Ableitung f' hat die Funktionsgleichung $f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x|<1$, die zweite Ableitung f'' hat die Gleichung $f''(x) := \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ für $|x|<1$ und für die dritte Ableitung f''' gilt $f'''(x) := \sum_{n=3}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{n-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$ für $|x|<1$. Bei der Berechnung des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X)$ wird unmittelbar f'' benötigt.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\mathrm{P}(X=n) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot(1-p)^2\cdot p^{n-2} = \\ &= (1-p)^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot p^{n-2} = \\ &= \frac{2\cdot(1-p)^2}{(1-p)^3} = \frac{2}{1-p}\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von X als Funktion von p verhält sich, wie erwartet, sie ist streng monoton steigend auf $[0;1[$ und es gilt: Wenn die Wahrscheinlichkeit für den Wert 0 groß ist, dann ist der Erwartungswert von X ebenfalls groß. Wenn die Werte für p gegen 0 gehen, dann geht der Erwartungswert gegen 2.

$$\lim_{p\to 1}\frac{2}{1-p}=\infty$$
$$\lim_{p\to 0}\frac{2}{1-p}=2$$

Wir betrachten den Graphen der angesprochenen Funktion: Abb. 1.

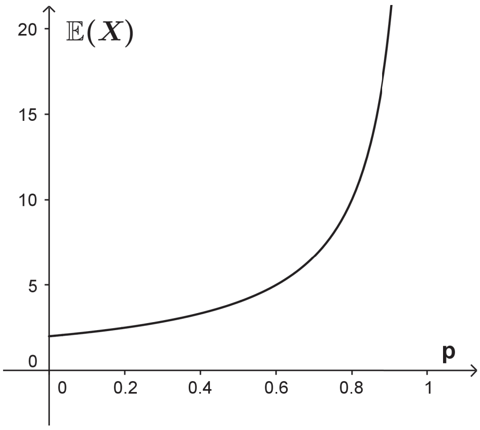

Abb. 1 Funktionsgraph des Erwartungswerts von X in Abhängigkeit von p

Das „Wartezeitproblem“ nach Götz (2016) hat seinen Ursprung bei Langlotz und Zappe (2015) bzw. Engel (1976), die beiden erst genannten simulierten über Zufallsversuche in einem Computerprogramm im folgenden Problem die Zahl e:

> *Problemstellung 2:* „Man addiere Zufallszahlen zwischen 0 und 1 solange, bis die Summe größer 1 ist. Wie viele Zahlen benötigt man im Durchschnitt?“

Im Durchschnitt benötigt man e Zahlen. Nicht ganz ernst gemeint, kann man e auch im diskreten Fall erhalten, man muss $p=1-\frac{2}{e}$ setzen. Tatsächlich lässt sich bei geeigneter Wahl von p jeder beliebige Erwartungswert größer gleich 2 erreichen.

Die Varianz berechnet sich ebenfalls wie bei Götz (2016). Der Verschiebungssatz und der Trick $n^2 = n\cdot(n-2)+2\cdot n$ führen wieder zum Ergebnis. Wir beginnen mit $\mathbb{E}(X^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2\cdot(n-1)\cdot(1-p)^2\cdot p^{n-2} = \\
&=(1-p)^2\cdot p\cdot\sum_{n=3}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot p^{n-3}+ \\
&\quad +2\cdot(1-p)^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot p^{n-2} = \\
&=(1-p)^2\cdot p\cdot\frac{6}{(1-p)^4}+ \\
&\quad +2\cdot(1-p)^2\cdot\frac{2}{(1-p)^3} = \\
&=\frac{6p+4\cdot(1-p)}{(1-p)^2} = \\
&=\frac{2p+4}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Daraus erhält man für die Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}^2(X) = \\
&= \frac{2p+4}{(1-p)^2}-\left(\frac{2}{1-p}\right)^2 = \\
&= \frac{2p}{(1-p)^2}.
\end{aligned}$$

Die Standardabweichung ist daher $\mathbb{D}(X)=\frac{\sqrt{2p}}{1-p}$. und es gilt, wie erwartet:

$$\lim_{p\to 0}\frac{\sqrt{2p}}{1-p}=0$$
$$\lim_{p\to 1}\frac{\sqrt{2p}}{1-p}=\infty.$$

Auch hier gilt, bei geeigneter Wahl von p lässt sich jeder beliebige Wert größer gleich 0 für die Standardabweichung erreichen, siehe dazu auch Abb. 2.

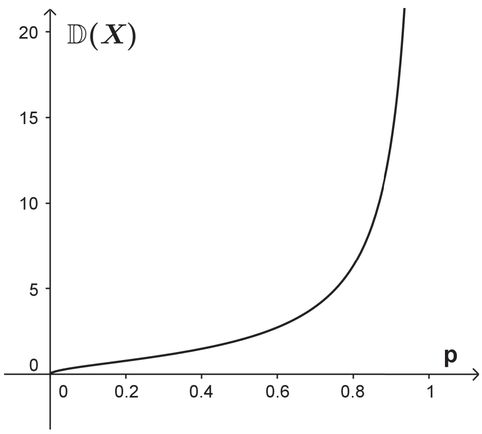

Abb. 2 Funktionsgraph der Standardabweichung von X in Abhängigkeit von p

2.2 Die negative Binomialverteilung

Die behandelte Problemstellung kann man dahingehend verallgemeinern, dass man nun die Zufallszahlen solange aufsummiert bis die Summe größer einer natürlichen Zahl k ist.

> *Problemstellung 3:* „Man addiere Zufallszahlen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen, solange, bis die Summe größer k ist. Wie lange muss man im Durchschnitt warten?"

Analog zu Götz (2016), S. 17, wollen wir die zugehörige Zufallsvariable mit X_k bezeichnen. Es ergibt sich:

$$\mathrm{P}(X_k = n) = \binom{n-1}{k} \cdot (1-p)^{k+1} \cdot p^{n-k-1}. \qquad (1)$$

Diese Wahrscheinlichkeit entspricht jener einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen, solche beschreiben die Wartezeit auf den (in diesem Fall) $k+1$-ten Treffer bzw. hier den $k+1$-ten Einser (vgl. Henze (2010), S. 181).

Die Herleitung des Erwartungswerts bzw. der Standardabweichung erfolgt erneut über Ableitungen der geometrischen Reihe oder ist bei Henze (2010) ebenda nachzulesen. Man erhält in diesem Fall den Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \frac{k+1}{1-p}$ und die Standardabweichung $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{(k+1)\cdot p}{1-p}}$.

3 Variationen des Ausgangsproblems

Die anfängliche Problemstellung von Götz (2016) kann leicht abgeändert werden und so entsteht eine Vielzahl an neuen interessanten Berechnungen von Verteilungen, Erwartungswerten und Standardabweichungen. Die einfache Formulierung gibt jedoch keine Auskunft über die Einfachheit der Berechnungen. In diesem Kapitel soll aber exemplarisch an weiteren Problemstellung aufgezeigt werden, dass die induktive Methode, zuerst erfolgt eine Berechnung für $p = 0,5$ dann für ein allgemeines p, mit der geometrische Reihe und ihren Derivaten durchaus öfters eine Anwendung findet. Bei den kommenden Rechnungen empfiehlt es sich, ein CAS zu verwenden, sie wurden verkürzt aufgeschrieben.

3.1 Zwei gleiche Zahlen hintereinander

> *Problemstellung 4:* „Man beobachte solange Zufallszahlen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 0 oder mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ den Wert 1 annehmen, bis zum ersten Mal eine Zahl zweimal hintereinander erscheint. Wie lange wartet man im Durchschnitt?"

Sei zu Beginn wieder $p = \frac{1}{2}$. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Zufallszahlen bis zweimal hintereinander eine 0 oder eine 1 auftaucht. Die natürlichen Zahlen sind der Wertebereich von X und es gilt $\mathrm{P}(X=0) = P(X=1) = 0$. Wir betrachten nun $\mathrm{P}(X=n)$ für $n > 1$: Es ist klar, dass der $n-1$-te und die n-te Ausfall entweder 0 oder 1 sein müssen. Alle Ausfälle davor müssen abwechselnd 0 und 1 bzw. 1 und 0 sein. Daraus folgt:

$$\mathrm{P}(X=n) = 0,5^{n-2} \cdot 0,5^2 + 0,5^{n-2} \cdot 0,5^2 = 0,5^{n-1}.$$

Es handelt sich tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, denn

$$\sum_{i=2}^{\infty} 0,5^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Für den Erwartungswert berechnet man:

$$\sum_{i=2}^{\infty} n \cdot 0,5^{n-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 3.$$

An dieser Stelle sei auf Humenberger (2000), S. 18 verwiesen, der diesen Spezialfall in einem leicht anderen Setting zeigt. Er betrachtete Muster in Münzwurfserien.

Die Standardabweichung erhält man über den Verschiebungssatz und den Trick $n^2 = n\cdot(n-1)+n$, für $\mathbb{E}(X^2)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot 0,5^{n-1} = \\ &= 0,5 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot 0,5^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot 0,5^{n-1} = \\ &= 8+3 = 11.\end{aligned}$$

Die Standardabweichung folgt aus $\mathbb{D}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 11 - 9 = 2$ und ergibt $\mathbb{D}(X) = \sqrt{2}$.

Im nächsten Schritt verallgemeinert man nun die Problemstellung auf eine beliebige Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$. Wir fragen nach der Berechnung von $\mathrm{P}(X=n)$ für $n \geq 2$. Dabei muss zwischen geraden und ungeraden n unterschieden werden. Am Ende dieser Serie hat man wieder entweder zweimal eine 0 oder zweimal eine 1. Wenn nun n gerade ist, dann gibt es davor jeweils gleich viele abwechselnde

0 und 1. Wenn n ungerade ist, dann gibt es davor unterschiedliche viele 0 und 1. Sei nun n gerade, dann findet sich ein passendes $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=n) &= (q\cdot p)^{\frac{n-2}{2}}\cdot p^2 + (q\cdot p)^{\frac{n-2}{2}}\cdot q^2 = \\
&= \mathrm{P}(X=2m) = \\
&= (q\cdot p)^{\frac{2m-2}{2}}\cdot (q^2+p^2) = \\
&= (q\cdot p)^{m-1}\cdot (q^2+p^2).
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir die Wahrscheinlichkeit bei einem ungeraden n. Es findet sich ein passendes $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=n) &= p\cdot(q\cdot p)^{\frac{n-3}{2}}\cdot q^2 + q\cdot(p\cdot q)^{\frac{n-3}{2}}\cdot p^2 = \\
&= \mathrm{P}(X=2k+1) = \\
&= (q\cdot p)^{k-1}\cdot(p\cdot q^2+q\cdot p^2) \\
&= (q\cdot p)^k\cdot\underbrace{(q+p)}_{=1} \\
&= (q\cdot p)^k.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle überprüfen wir, ob die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ausfälle 1 ist. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten der geraden und der ungeraden Ausfälle getrennt summiert.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{\infty}\mathrm{P}(X=n) = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{P}(X=2m) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}(X=2k+1) = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}(q\cdot p)^{m-1}\cdot(q^2+p^2) + \sum_{k=1}^{\infty}(q\cdot p)^k = \\
&= \frac{q^2+p^2}{1-q\cdot p} + \frac{1}{1-q\cdot p} - 1 = \\
&= \frac{p^2+p\cdot q+q^2}{1-q\cdot p} = \\
&= \frac{(p+q)^2-q\cdot p}{1-q\cdot p} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die Berechnung des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X)$ erfolgt dementsprechend:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\mathrm{P}(X=n) = \\
&= 2\cdot(q^2+p^2)\cdot\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(q\cdot p)^{m-1} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}(2\cdot k+1)(q\cdot p)^k = \\
&= \frac{2\cdot(q^2+p^2)}{(1-q\cdot p)^2} + (q\cdot p)\cdot \\
&\quad \cdot\left(2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(q\cdot p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(q\cdot p)^{k-1}\right) \\
&= \frac{2\cdot(q^2+p^2)}{(1-q\cdot p)^2} + \frac{2\cdot q\cdot p}{(1-q\cdot p)^2} + \frac{q\cdot p}{1-q\cdot p} = \\
&= \frac{-p^2+p+2}{p^2-p+1}.
\end{aligned}$$

Wenn $p=0$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu erhalten, gleich 1 und es benötigt daher nur zwei Schritte, bis zwei gleiche Zahlen hintereinander erscheinen. Analog dazu, wenn $p=1$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine 0 zu erhalten, gleich 1 und es benötigt ebenfalls nur zwei Schritte, bis zwei gleiche Zahlen hintereinander erscheinen. Am längsten muss man durchschnittlich warten, wenn $p=0{,}5$ ist, nämlich wie zu Beginn schon gezeigt, müssen im Durchschnitt 3 Zahlen abgewartet werden. Der Funktionsgraph des Erwartungswerts in Abhängigkeit von p ist in Abb. 3 zu betrachten.

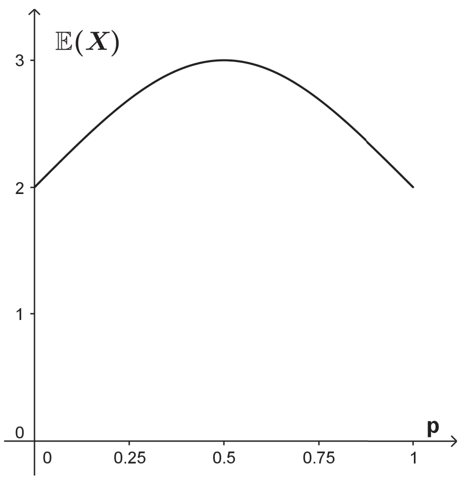

Abb. 3 Funktionsgraph des Erwartungswerts von X in Abhängigkeit von p

Intuitiv ist der qualitative Verlauf auch plausibel. Eine möglichst lange Reihe an Zufallszahlen wird bei diesem Experiment nur dann erreicht, wenn sich 0 und 1 abwechseln. Sobald man von der Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ abweicht, ist entweder eine 0 wahrscheinlicher als eine 1 oder umgekehrt, das heißt es ist wahrscheinlicher, dass das Zufallsexperiment früher endet. Somit erhält man den größten Erwartungswert bei $p = 0,5$.

Die Berechnung der Standardabweichung erfolgt abermals über den Verschiebungssatz und den beiden Tricks: $(2m)^2 = 2m\cdot(2m-2)+4m$ und $(2k+1)^2 = 4k\cdot(k-1)+8k+1$. An dieser Stelle sei nochmals die Verwendung eines CAS betont.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot \mathrm{P}(X=n) = \\
=&\sum_{m=1}^{\infty}(2m)^2\cdot \mathrm{P}(X=2m)+ \\
&+\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)^2\cdot \mathrm{P}(X=2k+1) = \\
=&4\cdot q\cdot p\cdot(q^2+p^2)\cdot\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(m-1)\cdot(q\cdot p)^{m-2}+ \\
&+4\cdot(q^2+p^2)\cdot\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot(q\cdot p)^{m-1}+ \\
&+4\cdot(q\cdot p)^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot(p\cdot q)^{k-2}+ \\
&+8\cdot q\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(q\cdot p)^{k-1}+ \\
&+q\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(q\cdot p)^{k-1} = \\
=&\frac{8\cdot q\cdot p\cdot(q^2+p^2)}{(1-q\cdot p)^3}+\frac{4\cdot(q^2+p^2)}{(1-q\cdot p)^2}+ \\
&+\frac{8\cdot(q\cdot p)^2}{(1-q\cdot p)^3}+\frac{8\cdot q\cdot p}{(1-q\cdot p)^2}+\frac{q\cdot p}{1-q\cdot p} = \\
=&\frac{-p^4+2p^3-10p^2+9p+4}{(p^2-p+1)^2}
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Varianz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(X) =&\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 = \\
=&\frac{-p^4+2p^3-10p^2+9p+4}{(p^2-p+1)^2}- \\
&-\left(\frac{-p^2+p+2}{p^2-p+1}\right)^2 = \\
=&\frac{-p\cdot(2p^3-4p^2+7p-5)}{(p^2-p+1)^2}
\end{aligned}$$

Aus diesem Grund ist die Standardabweichung $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{-p\cdot(2p^3-4p^2+7p-5)}{(p^2-p+1)^2}}$. Diese Funktion verhält sich wie erwartet, siehe dazu den Funktionsgraphen von $\mathbb{D}(X)$ in Abhängigkeit von p in Abb. 4.

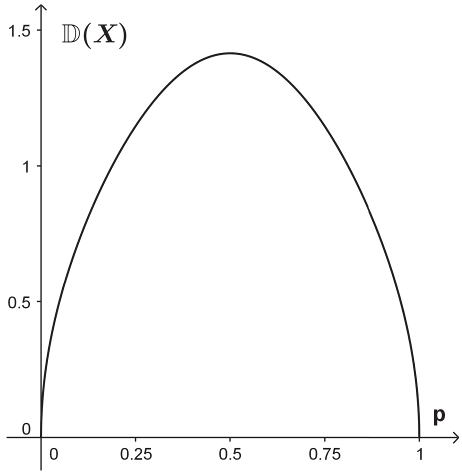

Abb. 4 Funktionsgraph der Standardabweichung von X in Abhängigkeit von p

Wenn $p = 0$, dann ist $\mathbb{D}(X) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 erscheint, ist gleich 1. Das bedeutet, nach der zweiten Zufallszahl ist die Wartezeit beendet. Im Fall von $p = 1$ gilt auch $\mathbb{D}(X) = 0$. So würden die Zufallszahlen stets 0 annehmen. Die größte Abweichung $\sqrt{2}$ findet man bei $p = \frac{1}{2}$ vor. Bei jeder Abweichung von $p = \frac{1}{2}$ ist das Erscheinen der 0 wahrscheinlicher als der 1 oder umgekehrt, daher ist es wahrscheinlicher, dass das Zufallsexperiment früher endet. Die Standardabweichung ist deswegen kleiner.

3.2 Eine größere Zahl als die vorangehende

Eine weitere Problemstellung, die mit dieser Methode bewältigbar ist, wird unten beschrieben. Sie wurde bereits in Götz (2016), S. 18 formuliert.

> *Problemstellung 5:* „Man beobachte solange Zufallszahlen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 0 oder mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert 1 annehmen, bis zum ersten Mal eine Zahl größer als die unmittelbar vorangehende ist. Wie lange muss man im Durchschnitt warten."

Für $p = \frac{1}{2}$ unterscheidet sich die Problemstellung nicht vom Ausgangsproblem, siehe Götz (2016) ebenda.

Sei nun $p \neq \frac{1}{2}$. Die Zufallsvariable, die die Anzahl der Zufallszahlen beschreibt, bis zum ersten Mal eine Zahl größer als die unmittelbar vorangehende ist, nennen wir abermals X. Ihr Wertebereich sind die natürlichen Zahlen, wobei $\mathrm{P}(X=0) = \mathrm{P}(X=1) = 0$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{X=2\}$ heben wir gesondert hervor: $\mathrm{P}(X=2)=p\cdot q$. Für alle Ereignisse $\{X=n\}$ mit $n\geq 3$ gilt aufgrund der Tatsache $p^{n-1}-q^{n-1}=(p-q)\cdot(p^{n-2}+p^{n-3}\cdot q+\ldots+q^{n-2})$:

$$\mathrm{P}(X=n)=p\cdot q\cdot\sum_{i=0}^{n-2}p^i\cdot q^{n-2-i}=\frac{p^n\cdot q-q^n\cdot p}{p-q}.$$

Der/die Leser/in mache sich die Verteilung anhand einiger Spezialfälle klar. Für $n=4$ zählt man folgende Möglichkeiten: 0001, 1001 und 1101. Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=4)=&p^2\cdot p\cdot q+p\cdot q\cdot p\cdot q+q^2\cdot q\cdot p=\\=&p\cdot q\cdot(p^2+p\cdot q+q^2)=\\=&p\cdot q\cdot\frac{p^3-q^3}{p-q}=\\=&\frac{p^4\cdot q-q^4\cdot p}{p-q}.\end{aligned}$$

Wir überprüfen nun, ob die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ausfälle 1 ergibt.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=3}^{\infty}\mathrm{P}(X=n)+p\cdot q=\\&=\frac{q\cdot p^3}{p-q}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}p^{n-3}-\frac{q^3\cdot p}{p-q}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}q^{n-3}+p\cdot q=\\&=\frac{q\cdot p^3}{(p-q)\cdot(1-p)}-\frac{q^3\cdot p}{(p-q)\cdot(1-q)}+p\cdot q=\\&=1\end{aligned}$$

Der Erwartungswert berechnet sich mit der mittlerweile gewohnten Methode.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(X)=\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot\mathrm{P}(X=n)+2\cdot p\cdot q=\\&=\frac{p\cdot q}{p-q}\cdot\left(\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot p^{n-1}-\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot q^{n-1}\right)+2\cdot p\cdot q=\\&=\frac{p\cdot q}{p-q}\cdot\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1-2\cdot p-\frac{1}{(1-q)^2}+1+2q\right)\\&\quad+2\cdot p\cdot q=\\&=\frac{1}{p\cdot(1-p)}\end{aligned}$$

Dieser Formel ist nun auch wieder für $p=\frac{1}{2}$ definiert und stimmt auch mit dem errechneten Wert 4 überein. Die Funktion des Erwartungswerts in Abhängigkeit von p ist auf $]0,1[$ linksgekrümmt und hat bei $p=\frac{1}{2}$ eine globale Minimumstelle, siehe dazu auch Abb. 5.

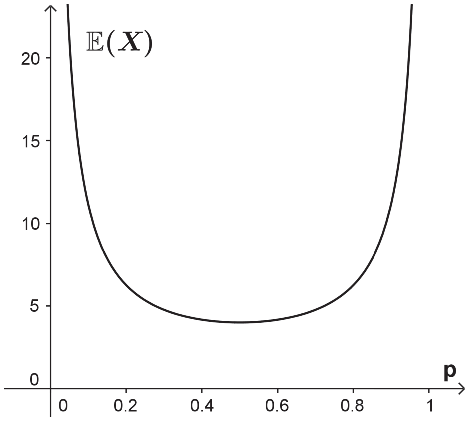

Abb. 5 Funktionsgraph des Erwartungswerts in Abhängigkeit von p

Für die Ränder des Definitionsbereichs gilt:

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{p\cdot(1-p)}=\infty$$
$$\lim_{p\to 1}\frac{1}{p\cdot(1-p)}=\infty.$$

Das Verhalten der Funktion stimmt mit der Intuition überein. Jedes Abweichen von $p=\frac{1}{2}$ führt dazu, dass das Auftreten einer 0 bzw. einer 1 wahrscheinlicher als das Auftreten einer 1 bzw. einer 0 ist. Damit dieses Zufallsexperiment endet, muss ein Wechsel zwischen diesen beiden Zahlen stattfinden. Dieser angesprochene Wechsel ist bei $p=\frac{1}{2}$ am wahrscheinlichsten.

Die Standardabweichung leitet sich wiederum mit dem Verschiebungssatz und dem bereits bekannten Trick $n^2=n\cdot(n-1)+n$ her.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}n^2\cdot\mathrm{P}(X=n)=\\&=\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdot\left(\frac{p^n\cdot q-q^n\cdot p}{p-q}\right)+\\&\quad+\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot\left(\frac{p^n\cdot q-q^n\cdot p}{p-q}\right)+4\cdot q\cdot p=\\&=\frac{q\cdot p^2}{p-q}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdot p^{n-2}-\\&\quad-\frac{q^2\cdot p}{p-q}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdot q^{n-2}+\\&\quad+\frac{q\cdot p}{p-q}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot p^{n-1}-\frac{q\cdot p}{p-q}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}n\cdot q^{n-1}+\\&\quad+4\cdot q\cdot p=\end{aligned}$$

$$=\frac{q\cdot p}{p-q}\cdot\left(\frac{2p}{(1-p)^3}-2p-\frac{2q}{(1-q)^3}+2q\right)+$$
$$+\frac{q\cdot p}{p-q}\cdot\left(\frac{1}{(1-p)^2}-1-2p\right)-$$
$$-\frac{q\cdot p}{p-q}\cdot\left(\frac{1}{(1-q)^2}-1-2q\right)+4\cdot q\cdot p=$$
$$=\frac{3p^2-3p+2}{p^2\cdot(1-p)^2}$$

Die Standardabweichung lautet $\mathbb{D}(X)=\sqrt{\frac{3p^2-3p+1}{p^2\cdot(1-p)^2}}$. Die berechnete Formel ist ebenfalls für $p=\frac{1}{2}$ definiert und stimmt mit dem errechneten Wert überein. Diese Funktion ist ebenfalls linksgekrümmt und hat bei $p=\frac{1}{2}$ ihr globales Minimum. An den Rändern verhält sie sich genauso, wie der Erwartungswert, siehe Abb. 6.

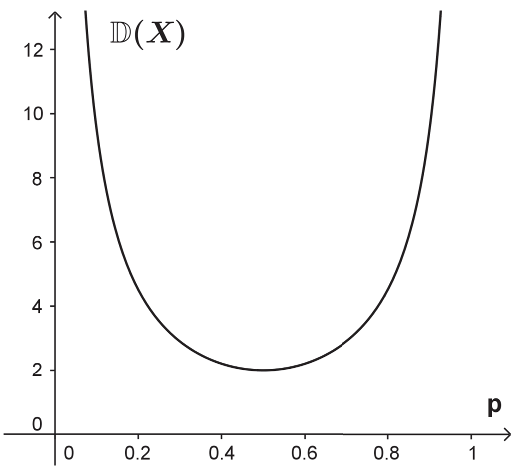

Abb. 6 Funktionsgraph der Standardabweichung von X in Abhängigkeit von p

3.3 Ausblick

Eine ganz leichte Änderung des Problems benötigt aber unter Umständen einen ganz anderen Zugang für die entsprechenden Berechnungen.

> *Problemstellung 6:* „Man beobachte solange Zufallszahlen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 0 oder mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert 1 annehmen, bis zum ersten Mal zweimal hintereinander eine 1 auftaucht. Wie lange muss man im Durchschnitt warten."

Bei dieser Aufgabe sei auf Henze (1998), S. 7 ff. bzw. Humenberger (2000), S. 20 ff., verwiesen, die in diesem Zusammenhang jeweils einen schönen Zusammenhang zu Differenzengleichungen und den Fibonacci-Zahlen herstellen.

Eine weitere Variante dieser Klasse liest sich so:

> *Problemstellung 7:* „Man addiere solange Zufallszahlen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit p den Wert -1 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert 1 annehmen, bis die Summe dieser Zahlen größer 1 ist. Wie lange wartet man im Durchschnitt?"

Das Auffinden der Verteilung erweist sich sogar im Spezialfall $p=\frac{1}{2}$ als komplex und benötigt andere Methoden. Eine Verteilung der Wartezeit X findet man über das Spiegelungsprinzip (engl. „Reflection Principle"), siehe beispielsweise Shreve (2003), S. 127 ff. oder Henze (2013), S. 7 ff.

4 Didaktisches Resümee

Ausgehend von der Problemstellung 1 gelangt man durch schrittweises Verallgemeinern zur negativen Binomialverteilung. Auf diese Weise lassen sich erstens einfache Wartezeitprobleme und zweitens eine andere diskrete Verteilung als die Binomialverteilung, die geometrische und hypergeometrische Verteilung im Mathematikunterricht behandeln. In diesem Zusammenhang sei die in diesem Aufsatz stattfindende und immer wieder geforderte Verzahnung unterschiedlicher Gebiete, hier sind es Stochastik und Analysis, ausdrücklich erwähnt.

Variationen des Problems sind zum Teil auch für den Mathematikunterricht verwendbar. Einige sind aber mit Vorsicht zu genießen, sie werden trotz der kleinen Abänderung sehr komplex.

Die Schwierigkeit, die bei der Thematisierung im Unterricht entsteht, ist die geeignete didaktische Reduktion für die Berechnung des Erwartungswertes bzw. der Standardabweichung zu finden. In anderen Worten: Wie kommt man zu den Formeln für die Derivate der geometrischen Reihe?

Es gibt verschiedene Vorschläge für diese Reduktion: Das gliedweise Differenzieren von Reihen kann in naiver Weise durchgeführt werden. Eine Begründung für dieses Vorgehen kann in der Schule jedoch nicht gegeben werden.

In Götz (2016), S. 19, wird eine Methode gezeigt, die das Differenzieren vermeidet: Seien $S_0=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ und $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}$, dann gilt $S_1=S_0+x\cdot S_1$. Daraus folgt $S_1=\frac{1}{(1-x)^2}$, wenn man $S_0=\frac{1}{1-x}$ voraussetzt. Analoge Herleitungen für S_0 und S_2 findet man bei Götz (2016), S. 19.

Wenn man die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ausfälle einer Zufallsvariable aufsummiert, dann ergibt das 1. Das kann man benutzen, um Werte von Reihen zu bestimmen. Ein ähnliches Argument finden wir beispielsweise bei Götz (1993), S. 188 ff.
Wir betrachten folgende verwandte Problemstellung: „Man addiere Zufallszahlen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen, solange bis die Summe größer 2 ist.“ Die Verteilung ist recht schnell gefunden, es gilt $\mathrm{P}(X = n+1) = \binom{n}{2} \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)^3$ für $n \geq 2$, siehe dazu Gleichung (1). Für die Summe muss dann gelten:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{P}(X = n+1) = \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)^3 = 1.$$

Die Bestimmung des Erwartungswertes des ursprünglichen Problems von Götz (2016) lässt sich mit diesem Ergebnis ohne Verwendung der Summenformeln der geometrischen Reihe bzw. ihrer Ableitungen ermitteln:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)^2 = \\ &= \frac{2}{1-p} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)^3 = \\ &= \frac{2}{1-p} \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)^3 =}_{=1} \\ &= \frac{2}{1-p}.\end{aligned}$$

Das Problem bei dieser Methode ist, dass man den Erwartungswert eigentlich vorher kennen muss. Ansonsten kann man schwer vorhersehen, welcher Term herausgehoben werden muss und eine andere Problemstellung muss zusätzlich betrachtet werden.

Behandelt man diese Probleme inklusive deren Verallgemeinerungen im Schulunterricht, dann sollten vor dem Verallgemeinerungsschritt Vermutungen über das Verhalten des Erwartungswerts und der Standardabweichung in Abhängigkeit von p besprochen werden. Diese werden dann rechnerisch überprüft.

Im Schulunterricht sind diesbezüglich auch Computersimulationen, wie beispielsweise bei Götz (2016), S. 17, erwähnt, durchführbar. Denkbar sind entweder vorgefertigte Umgebungen, in denen die Schüler/innen arbeiten, oder die kurzen Programme werden von den Schüler/innen selbst geschrieben. Nach einer experimentellen Phase können die gewonnen Ergebnisse überprüft werden.

Literatur

Engel, A. (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 2. Stuttgart: Klett.

Götz, S. (1993): Eine mögliche Verbindung von Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht und ein alternativer Zugang zur Poisson-Verteilung mit Hilfe eines Paradoxons. In: *Didaktik der Mathematik* (3), S. 182-206.

Götz, S. (2016): Ein einfaches Wartezeitproblem. In: *Stochastik in der Schule*, Vol. 36 (3), S. 16-20.

Henze, N. (1998): Wartezeitprobleme. Material zur Lehrerfortbildung. http://www.math.kit.edu/stoch/~henze/seite/sonst_pub/media/wartezeitprobleme_sons.publ.pdf (Zugriff: 01.04.2017)

Henze, N. (2010): Stochastik für Einsteiger. 8. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Henze, N. (2013): Irrfahrten und verwandte Zufälle. Springer Spektrum.

Humenberger, H. (2000): Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Zahlen. In: *Stochastik in der Schule*, Vol. 20 (3), S. 15-22.

Langlotz, H. und Zappe, W. (2015): 10 Jahre Leitidee Daten und Zufall - ein Blick nach Thüringen. In: *Stochastik in der Schule*, Vol. 35 (1), S. 18-24.

Shreve, S. (2003): Stochastic Calculus for Finance I. Springer Verlag.

Anschrift des Verfassers
Christian Dorner
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien
`christian.dorner@univie.ac.at`