Zum Paradoxon der beiden Kinder

RENATE MOTZER, AUGSBURG

Zusammenfassung: *Beim Paradoxon der beiden Kinder scheint eine zufällige Information zu einer Wahrscheinlichkeit zu führen, die dem gesunden Menschenverstand widerspricht. Wenn man das Zustandekommen dieser Information genauer untersucht, kann der Widerspruch aufgelöst werden.*

1 Die Aufgabenstellung und ihre scheinbare Lösung

Das scheinbare Paradoxon der beiden Kinder findet sich in ähnlichen Versionen in einigen Büchern (Büchter/Henn 2005), (Quak 1998) als ansprechende Aufgabe, die nachdenklich machen soll und zeigen soll, dass man sich nicht ohne weiteres auf die eigene Intuition verlassen darf.

Hier soll folgende Version diskutiert werden, die ich im Rahmen einer Lehrerfortbildung mit Referendaren behandelt habe:

> Sie wissen, dass Ihr Kollege zwei Kinder hat. Zufällig treffen Sie ihn und er hat eine Tochter dabei. Wie wahrscheinlich ist es, dass das andere Kind auch eine Tochter ist?
>
> *Zusatzfrage:*
>
> Macht es einen Unterschied, wo Sie den Kollegen treffen (z. B. auf der Straße oder beim Informationsabend am Mädchengymnasium)?

müsse ½ betragen.

In einer längeren Diskussion suchten wir schließlich nach einer geeigneten Simulierung dieses Zufallsexperimentes. Wir fanden keine, die alle SIch wollte, ohne die Zusatzfrage gestellt zu haben; die „klassische" Lösung vorstellen, die zum Ergebnis 1/3 führt, denn es ist einer der 3 Fälle (mj), (jm), (mm). Mir war an dieser Stelle noch nicht bewusst, dass die Laplaceannahme nicht unbedingt aufrechterhalten werden kann, wenn man ein Kind gesehen hat. Die Gleichwahrscheinlichkeit dieser 3 Ergebnisse ist nach dem Treffen nicht unbedingt gegeben, auch wenn sie zuvor bei 2 Kindern mit den Fällen (jj), (mj), (jm), (mm) im Allgemein zumindest näherungsweise zutreffen mag.

Bei einem Zuhörer jedenfalls regte sich deutlicher Widerstand. Er wollte sich nicht vom gesunden Menschenverstand abbringen lassen, welcher ihm sagte, diese Wahrscheinlichkeiten befriedigte. Aus den 4 möglichen Fällen einfach die Fälle (jj) wegzulassen, schien keine angepasste Strategie. Denn wie legt man fest, welches der Kinder, das jüngere oder das ältere dabei ist? Bei den Kombinationen (jm) und (mj) ist es klar, bei (mm) gibt es aber zwei Möglichkeiten. Muss man dieses Ergebnis also nicht doppelt gewichten?

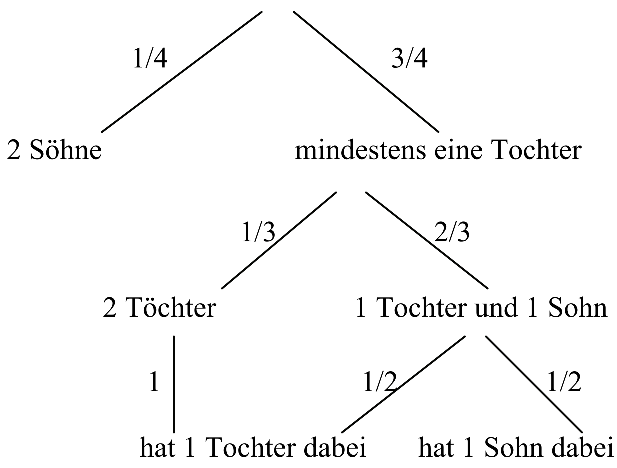
In der Lösung einer ähnlichen Version dieser Aufgabe findet sich die Aussage: „Es gibt keinen Grund, einen der möglichen Fälle (jj) (*hier: (mm)*), (jm), (mj) als wahrscheinlicher oder unwahrscheinlicher als einen anderen anzusehen." (Fundgrube, S. 221)

Inzwischen denke ich, es kann gute Gründe dafür geben. Ich will dies an der oben formulierten Version der Aufgabe aufzeigen.

2 Eine mögliche Lösung mit einem Baumdiagramm

Es kommt darauf an, wo, d. h. unter welchen Bedingungen, Sie Ihren Kollegen mit seiner Tochter treffen.

Ein Baumdiagramm über alle Väter, die 2 Kinder haben und eines dabei haben, soll dies klar machen:



Ist die Situation wie hier beschrieben, so gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass er 2 Töchter hat unter der Voraussetzung, dass er eine Tochter dabei hat, ist:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Hier bin ich davon ausgegangen, dass der Kollege genauso gut seinen Sohn dabei haben könnte, falls er einen Sohn hat. Dies wird im Alltag vielleicht im Allgemeinen der Fall sein (es sei denn, Väter nehmen generell Töchter lieber mit als Söhne, wovon ich aber nicht wirklich ausgehen würde).

Alternativ könnte man beim Baum als erste Verzweigung 4 Fälle angeben (jj, jm , mj, mm) und im zweiten Schritt auf die beiden Fälle „hat 1 Tochter / 1 Sohn dabei" verzweigen.

Wieder ergäbe sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit als ½ (so zu finden bei Henze, 2006).

Beim hier dargestellten Baum kommt die vermeintliche Lösung 1/3 als Verzweigungswahrscheinlichkeit vor. Daher wurde der 3-stufige Baum gewählt, auch wenn die erste Verzweigung für die Aufgabenstellung keine Rolle spielt.

3 Alternative Szenarien

Anders ist es, wenn Sie den Vater mit seiner Tochter beim Informationsabend für ein Mädchengymnasium treffen oder bei einem Sportwettbewerb, an dem nur Mädchen teilnehmen. Dann trifft die untere Verzweigung nicht zu, denn dann ist auch im Fall von „1 Tochter und 1 Sohn" die Wahrscheinlichkeit 1, dass er die Tochter dabei hat.

Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit tatsächlich nur 1/3, dass das zweite Kind auch eine Tochter ist (und zwar unabhängig davon, ob die Tochter, die dabei ist, das ältere oder das jüngere Kind ist. Dies wird in vielen Versionen der Aufgabe als zusätzliche Teilaufgabe angefügt, die dann zum erwarteten Ergebnis ½ führt).

Allerdings könnte es auch hier weitere Varianten geben: Wenn der Vater zwei Töchter hat, könnte er vielleicht auch beide dabei haben (wir bräuchten also am Schluss eine andere Verzweigung). Oder es ist wahrscheinlicher, dass dann gerade eine der beiden im Einschulalter fürs Mädchengymnasium ist oder in der entsprechenden Sportart aktiv ist.

Man kann sich durchaus vorstellen, dass es weitere Situationen gibt, in denen die Wahrscheinlichkeit p, die Tochter mitzunehmen, wenn man einen Sohn und eine Tochter hat, noch einen anderen Wert hat als ½ oder 1 (vgl. auch Henze 2006, Übungsaufgabe 15.8). Vielleicht ist sie sogar unterschiedlich, je nachdem welches Kind das ältere ist.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist bei dieser Verallgemeinerung: $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot p}=\dfrac{1}{1+2p}$ bzw.

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{3}\cdot 1}=\frac{1}{1+p_1+p_2}.$$

Daher ist die gefragte Wahrscheinlichkeit sehr abhängig von dem Zusammenhang, in dem man erfährt, dass das eine Kind eine Tochter (ein Sohn) ist.

Wenn man keine Besonderheiten weiß, dürfte das erste Baumdiagramm den Zufall vielleicht am besten beschreiben.

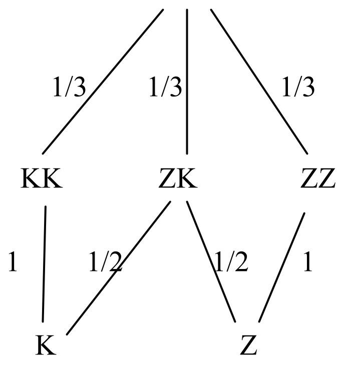
4 Analogie zur Aufgabe der zwei Münzen

In der Geschichte der Stochastik kann man die Aufgabe finden, dass zwei homogene Münzen gleichzeitig geworfen werden. Bezüglich der Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass die beiden Münzen verschiedene Symbole zeigen, meinte der berühmte Mathematiker d'Alembert im 18. Jahrhundert, sie wäre 1/3, da es sich um eine der 3 Möglichkeiten KK, ZK oder ZZ handelt. Unterscheidet man die Münzen nachträglich, so wird klar, dass „einmal Kopf und einmal Zahl" doppelt so wahrscheinlich ist wie die anderen Ergebnisse (weil es KZ und ZK gibt). Wüsste man hier: „Mindestens eine Münze zeigt K", könnte man analog fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Münze Kopf zeigt?

Wieder wäre hier zu fragen, wie man zur Information „mindestens eine Münze trägt Kopf" kommt. Hat man eine zufällig gesehen oder jemandem die Frage gestellt: „Trägt mindestens eine Münze Kopf?" und der Befragte durfte nur mit „Ja" oder „Nein" antworten.

Diese Aufgabe ist nicht zu verwechseln mit einer anderen paradoxen Aufgabe, bei der es um 3 Münzen geht: eine, die auf beiden Seiten K trägt, eine auf beiden Seiten Z und eine K und Z. Wenn man eine dieser Münzen von einer Seite sieht (sagen wir K), kann man sich fragen, wie wahrscheinlich ist es, dass die andere Seite auch K trägt. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt 2/3, denn insgesamt sind 3 K-Seiten im Spiel, bei zweien ist die andere Seite der Münze auch eine K-Seite und nur bei einer K-Seite ist die andere eine Z-Seite.

Auch diese Aufgabe könnte mit einem Baumdiagramm behandelt werden:



$$P(KK \mid K) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{2}{3}$$

Bei dieser Aufgabe ist ZK und KZ die gleiche Münze, es handelt sich also nicht um 2 verschiedene Ergebnisse oder ein doppelt zu wertendes Ergebnis.

Die Analogie zum Paradoxon der beiden Kinder liegt darin, dass die Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen von K unter der Bedingung ZK nur ½ und nicht 1 beträgt wie diejenige für das Zustandekommen von K unter der Bedingung KK. Dies entspricht dem Mitnehmen einer Tochter, wenn der Kollege einen Sohn und eine Tochter hat.

Literatur

Büchter, A.; W. Henn.(2005): Elementare Stochastik, Verlag Springer, Berlin 2005

Henze, Norbert (2006): Stochastik für Einsteiger, Vieweg, Braunschweig 2006[6]

U. Quak (Hrsg.): Fundgrube für den Mathematik-Unterricht in der Sekundarstufe I, Cornelsen 1998

Anschrift der Verfasserin

Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 10
86135 Augsburg
Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de

Dank an die Gutachterinnen und Gutachter für „Stochastik in der Schule“ in den Jahren 2006 und 2007

In den Jahren 2006 und 2007 waren die im Folgenden aufgeführten Kolleginnen und Kollegen als Gutachterinnen bzw. Gutachter für die Zeitschrift „Stochastik in der Schule“ tätig, zum Teil mehrfach. Die Herausgeber und Herausgeberinnen bedanken sich hiermit sehr herzlich für diese Hilfe und für ihre wertvolle Unterstützung der Autoren/Autorinnen.

M. Adelmeyer, Baden (Schweiz)
C. Bescherer, Ludwigsburg
H. Biermann, Bielefeld
M. Borovcnik, Klagenfurt
U. Brinkmann, Rahden
G. Brunk, Leichlingen
N. Christmann, Kaiserslautern
P. Daume, Berlin
H. Dehling, Bochum
P. Eichelsbacher, Bochum
A. Eichler, Münster
K. Fleischmann, Borken
S. Goetz, Wien
H. Haake, Minden
R. Haller, München
N. Henze, Karlsruhe
H. Humenberger, Wien
H. Kratz, Frankfurt
M. Loewe, Münster
L. Martignon, Ludwigsburg
S. Meixner, Vlotho
J. Meyer, Hameln
B. Neubert, Gießen
D. Pfeifer; Oldenburg
P. Rasfeld, Bielefeld
B. Reckelkamm, Bielefeld
W. Rentz, Bielefeld
H. Riedwyl, Bern
W. Riemer, Köln
B. Ringel, Bielefeld
D. Schluckebier, Bielefeld
G. Schubring, Bielefeld
I. Strauß, Kronberg
W. Stummer, Erlangen
E. Warmuth, Berlin
J. Wichmann, Bielefeld
H. Wirths, Oldenburg
B. Wollring, Kassel
H. Ziezold, Kassel

Für die Herausgeber/Herausgeberinnen
Gerhard König