Optimale Keno-Strategien und der zentrale Grenzwertsatz

ROGER W. JOHNSON, USA

***Zusammenfassung**: Für das Casino-Spiel Keno werden optimale Strategien gesucht; dazu wird sowohl die exakte hypergeometrische Verteilung als auch die approximierende Normalverteilung verwendet. Dabei lernt man etwas über die Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes.*

1 Das Spiel Keno

Das Casino-Spiel Keno ist sehr alt; es hat vermutlich vor 2000 Jahren in China seinen Ursprung (Marchel 2001). Beim modernen Keno-Spiel gibt es (in den USA) die Kugeln mit den Nummern 1 bis 80. Zwanzig dieser Kugeln werden von der Bank ohne Zurücklegen gezogen, und es ist Aufgabe des Spielers, vorherzusagen, welche Kugeln das sind. Dabei kann der Spieler wählen, wie viele Kugeln er vorhersagen will; diese Anzahl sei hier mit s bezeichnet. Sein Gewinn richtet sich natürlich danach, wie viele Kugeln er vorhersagen will und wie viele davon auch tatsächlich gezogen werden; die letztere Anzahl heiße hier c.
Es gibt auch andere Varianten beim Keno (insbesondere in Deutschland), aber wir beschränken uns auf die eben geschilderte.

Wie soll der Spieler s wählen? In diesem Artikel werden optimale Strategien entwickelt, diese Anzahl zu finden.
Für das Folgende muss der Schüler Binomialkoeffizienten und die hypergeometrische Verteilung kennen und wissen, wie man Erwartungswert und Varianz bei Verteilungen berechnet und welchen Einfluss lineare Transformationen auf diese Größen haben. Außerdem müssen sie wissen, wie man den zentralen Grenzwertsatz anwendet.

2 Grundlegende Berechnungen

Tabelle 1 zeigt den Auszahlungsplan, wie er 2004 in den USA zum Teil verwendet wurde. (Wenn man im Internet nach „Keno payout“ sucht, bekommt man auch andere Auszahlungspläne.) Nach dem Plan in Tabelle 1 darf s zwischen 2 und 20 liegen: $2 \le s \le 20$. Wenn man $s = 4$ wählt und 3 davon richtig trifft, bekommt man nach Tabelle 1 eine Auszahlung, die 5-mal so groß wie der Einsatz ist.
Wir nehmen im Folgenden stets an, dass der Einsatz 1 € beträgt. Der Nettogewinn bei diesem Beispiel beträgt dann 4 €.
Es fällt auf, dass Tabelle 1 nicht immer logisch ist. So ist die Auszahlung bei $s = 9$ und $c = 8$ größer (nämlich 4700) als bei $s = 10$ und $c = 9$ (nämlich 4500), obwohl die zweite Kombination weniger wahrscheinlich ist.
Um eine Strategie zu erarbeiten, wollen wir mit $s = 4$ beginnen. Die Verhältnisse

$$\frac{\binom{20}{0}\binom{60}{4}}{\binom{80}{4}},\ \frac{\binom{20}{1}\binom{60}{3}}{\binom{80}{4}},\ \ldots,\ \frac{\binom{20}{4}\binom{60}{0}}{\binom{80}{4}}$$

geben die Wahrscheinlichkeiten an für

$$C = 0,\ C = 1,\ \ldots,\ C = 4.$$

Aus Tabelle 1 ergibt sich der Bruttogewinn μ_B zu

$$\mu_B = 0\cdot\frac{\binom{20}{0}\binom{60}{4}}{\binom{80}{4}} + 0\cdot\frac{\binom{20}{1}\binom{60}{3}}{\binom{80}{4}} + 2\cdot\frac{\binom{20}{2}\binom{60}{2}}{\binom{80}{4}} + 5\cdot\frac{\binom{20}{3}\binom{60}{1}}{\binom{80}{4}} + 91\cdot\frac{\binom{20}{4}\binom{60}{0}}{\binom{80}{4}} \approx 0{,}92028$$

und die Varianz zu

$$\sigma^2 = 2^2\cdot\frac{\binom{20}{2}\binom{60}{2}}{\binom{80}{4}} + 5^2\cdot\frac{\binom{20}{3}\binom{60}{1}}{\binom{80}{4}} + 91^2\cdot\frac{\binom{20}{4}\binom{60}{0}}{\binom{80}{4}} - \mu_G^2 \approx 26{,}45278.$$

Der Erwartungswert μ des Nettogewinns ist

$$\mu = \mu_B - 1 \approx -0{,}07972$$

mit gleicher Varianz wie bei μ_B.

Erwartungswert und Varianz können natürlich für beliebiges s berechnet werden; der Quotient

$$\frac{\binom{20}{c}\binom{60}{s-c}}{\binom{80}{s}}$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, c Kugeln richtig zu erraten (Barnier 1986; die Wahrscheinlichkeit bei $s = c = 10$ beträgt etwa $\frac{1}{8.900.000}$).

	c=1	c=2	c=3	c=4	c=5	c=6	c=7	c=8	c=9	c=10
s=2	0	15								
s=3	0	2	46							
s=4	0	2	5	91						
s=5	0	0	3	12	810					
s=6	0	0	3	4	70	1600				
s=7	0	0	1	2	21	400	7000			
s=8	0	0	0	2	12	98	1652	10.000		
s=9	0	0	0	1	6	44	335	4700	10.000	
s=10	0	0	0	0	5	24	142	1000	4500	10.000

Tabelle 1

Tabelle 2 zeigt für den Nettogewinn Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für diverse Werte von s.

s	μ	σ	$\frac{\mu}{\sigma}$
2	–0,0981	3,566	–0,0275
3	–0,0842	5,392	–0,0156
4	–0,0797	5,143	–0,0155
5	–0,0807	20,610	–0,0039
6	**–0,073**	18,605	–0,0039
7	–0,0756	**36,279**	**–0,0021**
8	–0,0769	29,955	–0,0026
9	–0,0800	29,501	–0,0027
10	–0,0745	17,610	–0,0042

Tabelle 2

3 Die Keno-Strategie

Es gibt in Keno nur eine sichere Strategie: Spiele gar nicht! (George Mandos 1998)

Die optimale Strategie wird natürlich davon abhängen, was überhaupt optimiert werden soll.
Um den Nettogewinn zu optimieren, ist $s=6$ am besten und $s=2$ am schlechtesten.

Alternativ kann ein Spieler die Wahrscheinlichkeit optimieren wollen, den Nettogewinn oberhalb einer gewissen Grenze zu halten. So kann man etwa nach einer Serie von n Spielen möglichst einen Ausgleich erzielen zu wollen. Falls man wiederholt mit $s=2$ gespielt hat, wird man das mit der Binomialverteilung berechnen. Für $s>2$ jedoch ist eine solche Berechnung viel komplizierter. Daher nehmen wir nun an, dass wir so oft spielen, dass sich der zentrale Grenzwertsatz anwenden lässt. Falls X_i der Nettogewinn für Spiel Nr. i ist, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Ausgleich gegeben durch

$$P\left(X_1+X_2+\ldots+X_n \ge 0\right)=P\left(\overline{X}\ge 0\right)$$
$$=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\ge\frac{0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes etwa so groß wie

$$P\left(Z\ge -\sqrt{n}\cdot\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

wo Z nach N(0; 1) verteilt ist.
Für festes n wird diese Wahrscheinlichkeit optimiert durch $s=7$, weil hier der Quotient $\frac{\mu}{\sigma}$ minimal ist.

Eine aggressivere Strategie besteht darin, die Wahrscheinlichkeit zu optimieren, wenigstens ein positives Minimum m zu gewinnen (etwa $m=0,2\cdot n$ für mindestens 20 % Profit). Eine zur obigen ähnliche Rechnung führt auf

$$P\left(X_1+X_2+\ldots+X_n \ge m\right)=P\left(\overline{X}\ge\frac{m}{n}\right)$$
$$\approx P\left(Z\ge\frac{m}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sigma}-\sqrt{n}\cdot\frac{\mu}{\sigma}\right).$$

Nach Tabelle 1 minimiert $s=7$ sowohl $\frac{1}{\sigma}$ als auch $\frac{-\mu}{\sigma}$. Daher gilt für jedes positive m und für hinreichend große n (um die Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes zu gewährleisten), dass $s=7$ die Wahrscheinlichkeit maximiert, in n aufeinander folgenden Spielen mindestens m zu gewinnen.

4 Die Approximation nach dem zentralen Grenzwertsatz

Tabelle 3 gibt für unterschiedliche Werte für s und für $n = 100$ die Wahrscheinlichkeit an, einen Ausgleich zu erzielen. Dabei bezeichnet q die angegebene Wahrscheinlichkeit nach der eben beschriebenen Methode, mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes zu approximieren. Ferner bezeichnet r die durch Simulationen geschätzte gleiche Wahrscheinlichkeit (die Schätzung basiert auf 10.000 Wiederholungen von $n = 100$ Spielen; Minitab-Code kann beim Autor via eMail angefordert werden).

s	q	r
2	0,3916	0,3938
3	0,4379	**0,4089**
4	0,4384	0,2693
5	0,4844	0,0610
6	0,4843	0,2641
7	**0,4917**	0,0880
8	0,4898	0,2209
9	0,4892	0,1700
10	0,4831	0,2096

Tabelle 3

Wie ist die große Diskrepanz zwischen q und r zu erklären?
Bild 1 zeigt das Histogramm von 10.000 Wiederholungen bei $n = 100$ Spielen mit $s = 4$.

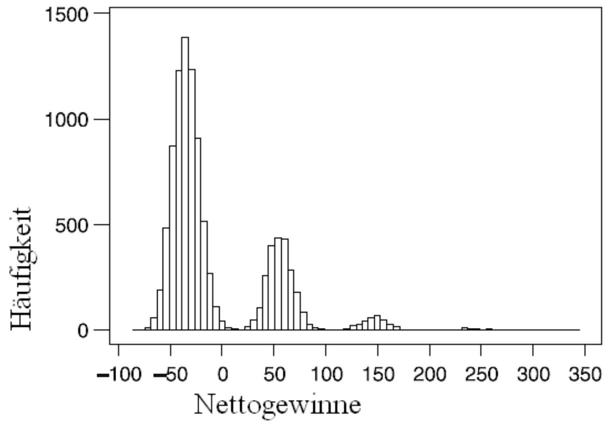

Bild 1

Das Histogramm ist alles andere als annähernd normal, so dass man n sehr viel größer wählen muss, um den zentralen Grenzwertsatz überhaupt anwenden zu können. Für $s = 4$ scheint $n = 1500$ zu genügen; für größere s muss n entsprechend größer sein. Daher ist in Tabelle 3 die Spalte mit dem durch Simulationen gewonnenen r für die optimale Strategie aussagekräftiger.

5 Schlussbemerkung

Keno ist ein Beispiel aus der wirklichen Welt, in dem der zentrale Grenzwertsatz i.a. nicht für realistische Werte von n angewendet werden kann. Besser ist es, sich beim Entwickeln optimaler Strategien für so kleine Werte wie $n = 100$ auf Simulationen zu verlassen.

Literatur

Barnier, W. (1986). Expected Loss in Keno. COMAP Module 574, The Consortium for Mathematics and its Applications. Available at http://www.comap.org/

Mandos, G. (1998). The Everything Casino Gambling Book. Holbrook, MA: Adams Media Corporation.

Marchel, J. (2001). K.I.S.S. Guide to Gambling. New York: DK Publishing.

Bei der Übersetzung hat der Heftherausgeber die Originalquelle gekürzt und bearbeitet.

Originalquelle:
Roger W. Johnson:
Optimal Keno Strategies and the Central Limit Theorem
Teaching Statistics. Vol 28 (1), Spring 2006, 26 – 29.

Anschrift des Verfassers:
Roger W. Johnson
South Dakota School of Mines and Technology, USA.
e-mail: roger.johnson@sdsmt.edu