

# Figurierte Zahlen, Urnen und Kugelfarben

KLAUS-ULRICH GUDER, Lüneburg

HANS HUMENBERGER und BERTHOLD SCHUPPAR, Dortmund

**Zusammenfassung:** Bei einem elementaren stochastischen Problem (Ziehung von zwei Kugeln aus einer Urne mit weißen und schwarzen Kugeln), werden Verbindungen zu figurierten Zahlen herausgearbeitet: insbesondere Quadrat-, Rechtecks- und vor allem Dreieckszahlen. Die zu Grunde liegenden Begründungen werden auf rechnerisch-algebraischer und auf anschaulicher Ebene mittels Punktmustern gegeben. Für eine aktuelle verwandte Aufgabe siehe Von der Heyde [2004].

## 1 Einleitung

Problem: In einer Urne liegen insgesamt  $n$  Kugeln,  $s$  schwarze und  $w = n - s$  weiße. Es werden gleichzeitig zwei Kugeln (oder zwei einzelne Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen) zufällig gezogen. Wir betrachten die beiden komplementären Ereignisse:

**G** := die beiden gezogenen Kugeln haben gleiche Farbe;

**V** := die beiden gezogenen Kugeln haben verschiedene Farbe.

Unter welchen Bedingungen an  $s$  und  $w$  gilt jeweils

$P(G) = P(V)$ ,  $P(G) < P(V)$  bzw.  $P(G) > P(V)$  ?

Zunächst widmen wir uns dem Problem der **Gleichwahrscheinlichkeit**  $P(G) = P(V)$ , woraus dann auch unmittelbar die Bedingungen für  $P(G) < P(V)$  bzw.  $P(G) > P(V)$  folgen werden.

Vielleicht denkt man für Gleichwahrscheinlichkeit intuitiv zuerst an  $s = w$ ; bereits auf den zweiten Blick wird klar, dass dies nicht so sein kann, sondern dass bei  $s = w$  immer  $P(G) < P(V)$  gelten muss. Stellt man sich nämlich zwei einzelne Ziehungen vor, so sagt die Farbe der ersten Kugel noch nichts über das Eintreten von **V** bzw. **G** aus. Erst die zweite Kugel entscheidet darüber. Kugeln von der Farbe der ersten gezogenen Kugel gibt es jedoch nun eine weniger, so dass bei  $s = w$  immer  $P(G) < \frac{1}{2} < P(V)$  gilt.

Formal: Mit  $s = w$  (also  $n = 2s$ ) ergibt sich durch Anwenden der Pfadregeln:

$$P(V) = \frac{s}{n} \cdot \frac{w}{n-1} + \frac{w}{n} \cdot \frac{s}{n-1} = \frac{2s^2}{2s(2s-1)} = \frac{s}{2s-1} > \frac{1}{2}$$

Andererseits sind auch leicht Situationen zu konstruieren, in denen **G** wahrscheinlicher als **V** ist, z. B. liegt es doch auf der Hand, dass bei deutlicher Überzahl einer Farbe (z. B.  $s = 1$  und  $w = 100$  oder im Extremfall ausschließlich Kugeln einer Farbe)

$$P(G) > \frac{1}{2} > P(V) \text{ ist.}$$

Es ist zwar a priori zunächst gar nicht klar, ob **Gleichwahrscheinlichkeit** überhaupt erreicht werden kann, doch findet man durch Probieren leicht eine einfache  $w$ - $s$ -Kombination für Gleichwahrscheinlichkeit, z. B.  $s = 1$  und  $w = 3$  (oder umgekehrt):

$$P(V) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

## 2 Lösung mittels Gleichung

Für unseren Zugang wählen wir die Anzahl  $w$  weißer und die Anzahl  $s$  schwarzer Kugeln als Variablen. O. B. d. A. setzen wir  $s \leq w$  voraus und erhalten bei Gleichwahrscheinlichkeit:

$$P(G) = \frac{s \cdot (s-1) + w \cdot (w-1)}{n \cdot (n-1)}$$

$$P(V) = \frac{2sw}{n \cdot (n-1)}$$

Aus  $P(G) = P(V)$  folgt

$$\frac{s \cdot (s-1) + w \cdot (w-1)}{n \cdot (n-1)} = \frac{2sw}{n \cdot (n-1)} \quad (1)$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner  $n \cdot (n-1)$  erhalten wir daraus  $s^2 - s + w^2 - w = 2sw$  bzw.

$$w^2 - 2sw + s^2 = w + s, \text{ d. h.}$$

$$(w-s)^2 = w+s \quad (2)$$

Wir wollen diese Gleichung auf 2 Arten behandeln: einerseits eine rechnerisch-algebraische Lösung finden und andererseits eine geometrische mittels Punktmustern.

**Rechnerisch-algebraische Lösung:** Es ist aus (2) zunächst unmittelbar zu erkennen, dass  $(w-s)^2 = w+s$  eine Quadratzahl  $k^2$  sein muss. O. B. d. A. sei  $w \geq s$  und  $k := w-s \geq 0$ . Damit geht (2) wegen

$w = k + s$  über in  $k^2 = k + 2s$ , woraus man sofort erhält:

$$s = \frac{(k-1)k}{2} = D_{k-1}.$$

Für  $w$  ergibt sich

$$\begin{aligned} w &= k^2 - D_{k-1} = k^2 - \frac{k^2 - k}{2} = \\ &= \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = D_k, \end{aligned}$$

also die nächstfolgende Dreieckszahl. (Hätten wir  $s \geq w$  vorausgesetzt, so hätte sich analog  $w = D_{k-1}$  und  $s = D_k$  ergeben.) Insgesamt haben wir also Folgendes bewiesen:

Es ist genau dann gleichwahrscheinlich, zwei gleichfarbige Kugeln bzw. zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, wenn  $s$  und  $w$  zwei aufeinander folgende Dreieckszahlen sind (dann ist  $n$  offensichtlich eine Quadratzahl).

Zahlenbeispiele möglicher  $(s, w)$ -Kombinationen wären also (natürlich auch umgekehrt!): (1, 3), (3, 6), (6, 10), (10, 15), (15, 21), ...

**Punktmusterbeweis zu  $(w-s)^2 = w+s \Leftrightarrow s = D_{k-1}$  und  $w = D_k$  für ein  $k \geq 2$ :**

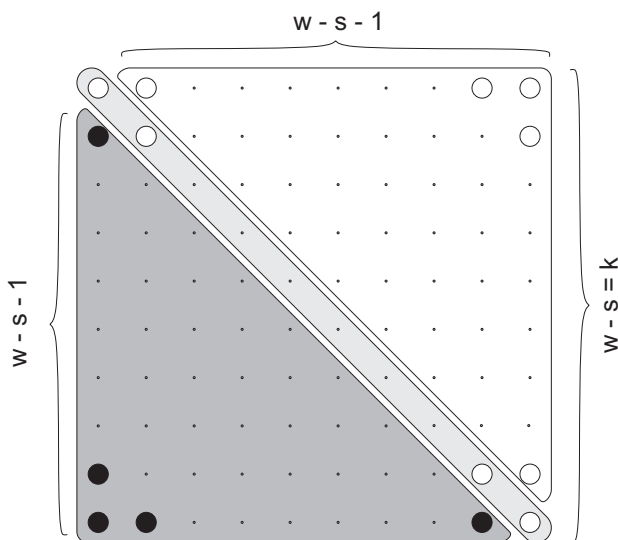


Abbildung 1

Wir zeichnen ein „ $(w-s)$ -Quadrat“ und können damit beide Richtungen leicht zeigen:

„ $\Leftarrow$ “: Wenn  $s = D_{k-1}$  und  $w = D_k$ , so ist  $w-s = k$  und  $w+s = k^2$ , woraus unmittelbar die Behauptung folgt (siehe auch Abb. 1).

„ $\Rightarrow$ “: Die Diagonale in einem  $(w-s)$ -Quadrat enthält ebenfalls  $w-s$  Punkte.

Wenn man diese Diagonale von allen  $w+s [= (w-s)^2]$  Punkten abzieht, bleiben  $w+s - (w-s) = 2s$  Punkte über, so dass die Anzahl der Punkte unter und über dieser Diagonale je  $s = D_{w-s-1}$  sein muss. Damit ist auch klar:

$w = s + (w-s) = D_{w-s-1} + (w-s) = D_{w-s}$ , also die nächstfolgende Dreieckszahl.

**Bemerkungen:**

- Bei festem  $s$  und wachsendem  $w$  (ausgehend von  $w_0 = s$ ) gilt zunächst  $w > D_{w-s}$  und ab einem gewissen Wert dann  $w < D_{w-s}$  (die Dreieckszahlen wachsen quadratisch!) – diese „Umkehrung“ wird in folgendem Punkt wichtig;
- Auch die Fragen nach  $P(G) < P(V)$  bzw.  $P(G) > P(V)$  können in dieser Sichtweise leicht beantwortet werden: Indem das Gleichheitszeichen in (1) durch das jeweilige Ungleichheitszeichen ersetzt wird, ergibt sich:

$P(G) < P(V) \Leftrightarrow (w-s)^2 < w+s$ , was „natürlich“ (warum?) genau dann der Fall ist, wenn  $w$  kleiner als obiger Wert (bei Gleichheit) ist, d. h. wenn  $w$  immer noch so klein ist, dass  $w > D_{w-s}$  ist (siehe oben!).

$P(G) > P(V) \Leftrightarrow (w-s)^2 > w+s$ , was genau dann der Fall ist, wenn  $w$  größer als obiger Wert (bei Gleichheit) ist, d. h. bei  $w < D_{w-s}$ .

Das beschriebene Vorgehen zur Untersuchung des Problems fußte letztlich auf der formalen Ebene von Gleichung (1) und einigen zugehörigen algebraischen Umformungen. Obiger Punktmusterbeweis kann daher keinen direkten Bezug zur stochastischen Situation aufbauen. Daher sollen an dieser Stelle noch weitere Punktmusterlösungen präsentiert werden, die das Problem ganz ohne formale Gleichungen lösen und einen solchen direkten Bezug herstellen. Diese liefern außerdem auch ohne zusätzlichen Aufwand eine Antwort auf die Fragen nach Bedingungen für  $P(G) < P(V)$  bzw.  $P(G) > P(V)$ .

### 3 Eine statische Lösung ausschließlich mit Punktmustern

Um das Problem mit Punktmustern zu behandeln, stellen wir uns die möglichen Ereignisse in einem quadratischen Raster (bzw. „Koordinatensystem“ – wie in Abb. 2) angeordnet vor.

Am Rand der Tabelle stehen dabei die schwarzen (1 bis  $s$ ) bzw. weißen Kugeln ( $s + 1$  bis  $s + w = n$ ). An die inneren „Gitterpunkte“ ( $i, j$ ) des Rasters (Koordinatensystems) kommen nun verschiedenartige Kreise, die symbolisieren sollen, ob bei Ziehung der  $i$ -ten und  $j$ -ten Kugel ( $1 \leq i \neq j \leq n$ ) das Ereignis G (gleiche Farbe) oder V (verschiedene Farbe) eingetreten ist. Da wir zwei Kugeln gleichzeitig (bzw. hintereinander, aber OHNE Zurücklegen) ziehen, müssen wir die Diagonale (d. h. Punkte mit  $i = j$ ) wegstreichen.

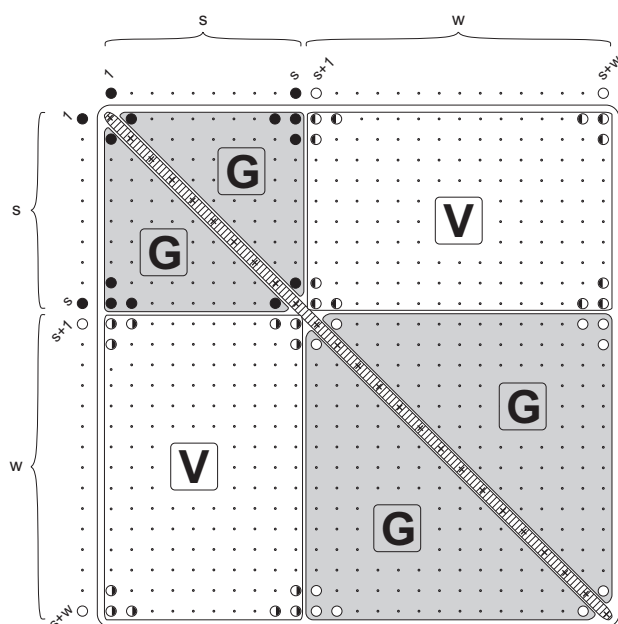


Abbildung 2

Im Inneren des Rasters stehen dabei  
 weiße Kreise, wenn *zwei weiße Kugeln*,  
 schwarze Kreise, wenn *zwei schwarze Kugeln*,  
 halb-schwarz-weiße Kreise, wenn *zwei verschieden farbige Kugeln*  
 gezogen werden.

$P(G) = P(V)$  bedeutet in dieser Sicht, dass es genau so viele weiße und schwarze Kreise zusammen wie halb-schwarz-weiße Kreise gibt, d. h. dass die G-Bereiche insgesamt genau so groß wie die V-Bereiche sind.

Aus Symmetriegründen können wir uns für die weiteren Darstellungen auf *einen* Bereich (z. B. jenen *oberhalb* der Diagonale) beschränken, denn die Punkte ( $i, j$ ) und ( $j, i$ ) realisieren ja letztlich dasselbe Ziehungsergebnis – Kugel  $i$  und Kugel  $j$  werden gezogen – nur in anderer Reihenfolge:

Bei  $P(G) = P(V)$  müssen die beiden G-Dreiecke mit den rein schwarzen bzw. rein weißen Kreisen zusammen genau so viele Kreise enthalten wie das V-Rechteck  $w \times s$  (siehe Abb. 2).

Unter welcher Bedingung ist das der Fall?

Wir spiegeln<sup>1</sup> („klappen“) das linke und das untere G-Dreieck in das V-Rechteck hinein (Spiegelachsen sind dabei die Geraden  $x = s + \frac{1}{2}$  bzw.  $y = s + \frac{1}{2}$ ; siehe Abb. 3). Dabei wird einerseits bis auf eine Diagonale von  $s$  Kreisen das gesamte V-Rechteck überdeckt; andererseits verursacht das größere G-Dreieck ein überstehendes Dreieck mit

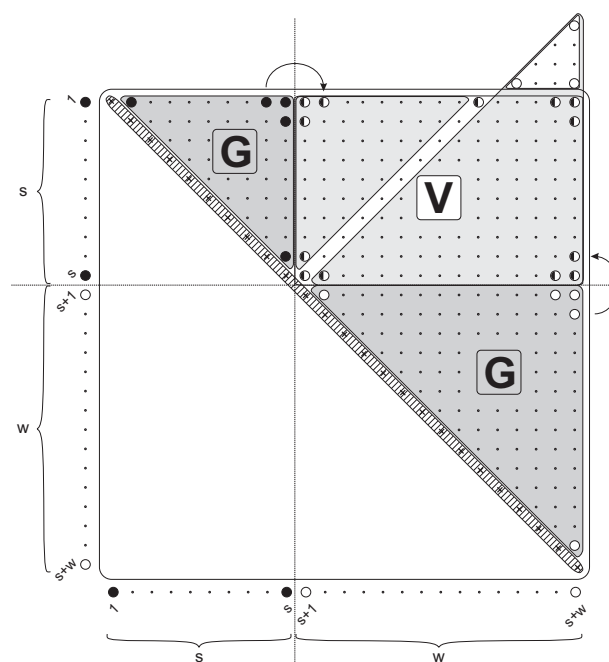


Abbildung 3

Höhe  $w - s - 1$ . D. h. aus  $P(G) = P(V)$  folgt unmittelbar  $s = D_{w-s-1}$ . Zwangsläufig ist dann

$$w = s + (w - s) = D_{w-s-1} + (w - s) = D_{w-s}.$$

Wir haben damit (ganz ohne eine Formel oder eine Gleichung mit bedingten Wahrscheinlichkeiten!) eine *rein anschauliche* Lösung des ursprünglichen Problems (mit *direktem Bezug* zur ursprünglichen stochastischen Situation) gefunden.

<sup>1</sup> Wir danken einer unbekanntenen Gutachterin bzw. einem Gutachter für einen Vereinfachungshinweis zu dieser Lösung.

Oben haben wir mittels bedingten Wahrscheinlichkeiten zunächst die *formale* Gleichung (1) aufgestellt, diese etwas algebraisch umgeformt und die entstehende Gleichung (2) schließlich auch anschaulich gelöst.

#### 4 Eine dynamische Lösung nur mit Punktmustern

Für diesen Ansatz stellen wir uns zunächst folgende Situation vor: eine *feste* Anzahl  $s$  schwarzer und eine *variable* Anzahl  $w$  weißer Kugeln; zu Beginn setzen wir  $w_0 = s$ . Wenn wir in dieser Situation die zwei Kugeln nacheinander, aber **mit Zurücklegen** ziehen, so ist unmittelbar klar, dass  $P(G) = P(V)$  ist: In der linken Zeichnung von Abb. 4 sind die Anzahlen der gleich- bzw. verschiedenfarbigen Kreise („Ziehungsergebnisse“), d. h. die G- und die V-Bereiche offensichtlich gleich groß:

Es wird aber bei unseren Spielregeln ohne Zurücklegen gezogen, so dass in den beiden G-Quadraten die Diagonalepunkte  $i = j$  wegfallen und dadurch das Gleichgewicht der G- bzw. V-Bereiche gestört wird. Nun fragen wir uns, um wie viel  $w$ , ausgehend von  $w_0 = s$ , *vergrößert* werden muss ( $\rightarrow$  „dynamische“ Lösung), so dass dieses Defizit der G-Bereiche genau kompensiert wird.

Es ist klar, dass durch den Wegfall der beiden dunkel unterlegten Diagonalen der G-Bereich um insgesamt  $2s$  Kreise vermindert wird. Wenn nun  $w$ , ausgehend von  $w_0 = s$ , vergrößert wird (angedeutet durch das Wachsen des  $w$ -Bereiches nach rechts bzw. nach unten in der rechten Figur von Abb. 4), so werden zunächst sowohl der G- als auch der V-Bereich nach rechts und nach unten um je ein  $(w - s) \times s$ -Rechteck größer. Diese Zuwächse sind also für beide Bereiche gleich ( $V_1, G_1 ; V_2, G_2$ ).

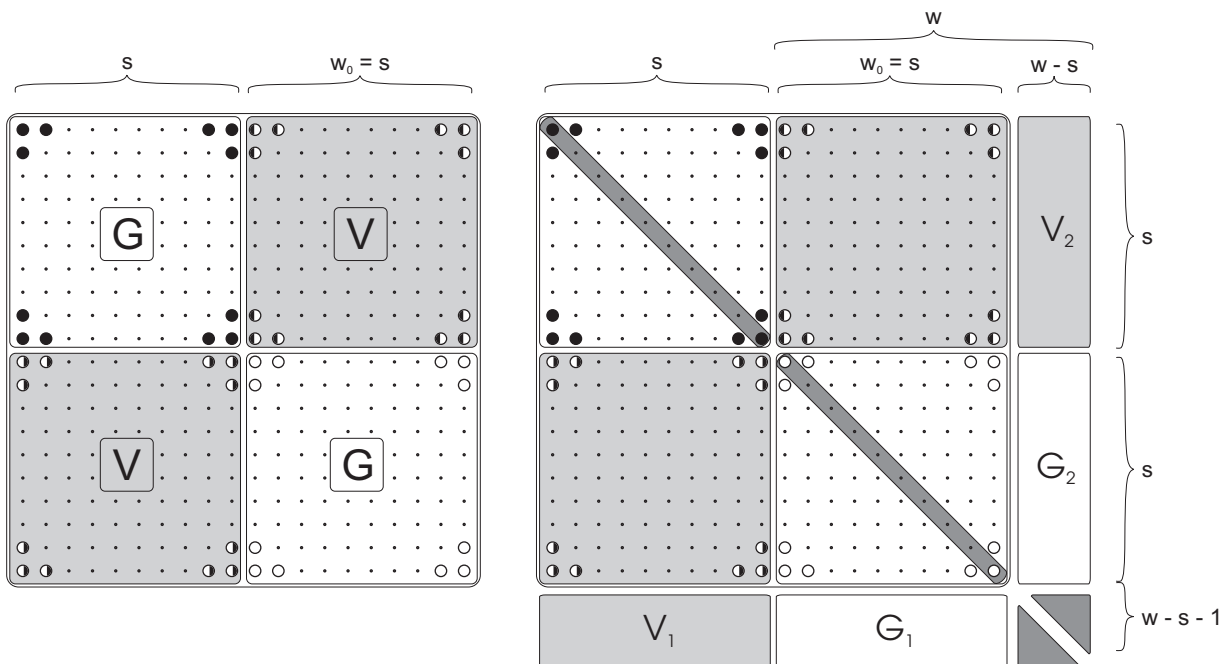


Abbildung 4

„Rechts unten“ nimmt dabei der G-Bereich zu, ohne dass es dafür einen gegengleichen V-Zuwachs gäbe, nämlich um die zwei dunkel unterlegten Dreiecksbereiche (die Diagonale bleibt auch hier selbstverständlich ausgespart!): In jedem dieser Bereiche befinden sich dabei  $D_{w-s-1}$  Kreise.

Nun ist aber dadurch sofort klar: Kompensation des  $2s$ -Verlustes im G-Bereich durch die Diagonalen (und somit Gleichwahrscheinlichkeit  $P(G) = P(V)$ ) ist genau dann erreicht, wenn

$$2s = 2D_{w-s-1} \text{ bzw. } s = D_{w-s-1} \text{ ist.}$$

Damit ist wiederum auch

$$w = s + (w - s) = D_{w-s-1} + (w - s) = D_{w-s} \text{ klar.}$$

**Bemerkung:** Auch in Abschnitt 4 ist die Frage nach den Bedingungen für  $P(G) < P(V)$  bzw.  $P(G) > P(V)$  ohne zusätzlichen Aufwand rasch zu beantworten ( $s$  halten wir konstant):

Wenn  $w$  nur wenig größer als  $s$  ist, also immer noch  $w > D_{w-s}$  ist (siehe obige „Umkehrung“) wird der

$2s$ -Verlust des G-Bereichs noch nicht ganz ausgeglichen, und es ist  $P(G) < P(V)$ .

Bei größeren  $w$ -Werten, wenn also  $w < D_{w-s}$  ist, wird dieser Verlust mehr als ausgeglichen, und es ist  $P(G) > P(V)$ .

Wenn  $s$  keine Dreieckszahl ist, so kann durch Wachsen von  $w$  nie Gleichwahrscheinlichkeit erreicht werden, sondern die „Situation“ würde dabei von  $P(G) < P(V)$  auf  $P(G) > P(V)$  „springen“.

#### Literatur:

Von der Heyde, Paul (2004): Chancengleichheit. Spektrum der Wissenschaft, Sept. 2004, S. 104.

Klaus-Ulrich Guder  
FB Erziehungswissenschaften, Univ. Lüneburg,  
Mathematik und Didaktik der Mathematik,  
D – 21 332 Lüneburg

[guder@uni-lueneburg.de](mailto:guder@uni-lueneburg.de)

Hans Humenberger,  
Berthold Schuppar  
IEEM, FB Mathematik, Univ. Dortmund  
D – 44 221 Dortmund

[Hans.Humenberger@math.uni-dortmund.de](mailto:Hans.Humenberger@math.uni-dortmund.de)

[Berthold.Schuppar@math.uni-dortmund.de](mailto:Berthold.Schuppar@math.uni-dortmund.de)