

# Über Wahrscheinlichkeiten beim Doppelkopfspiel <sup>1</sup>

HEINZ ALTHOFF, BIELEFELD

## Zusammenfassung

Für 8 verschiedene Kartenverteilungen beim Doppelkopf hat der Autor seine 5 Doppelkopffreunde die Häufigkeit ihres Auftretens schätzen lassen und später zum Vergleich deren Wahrscheinlichkeit berechnet. Darüber hinaus werden Anregungen gegeben, wie man die Aufgabenstellungen in mehrfacher Hinsicht variieren kann.

## 1 Einige mögliche Kartenverteilungen; Schätzwerte für die Häufigkeit ihres Auftretens

Als ich kürzlich an einem Doppelkopfabend zweimal ein ungewöhnliches "Blatt" bekommen habe, hat mich dies am nächsten Tag veranlaßt, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieser und einiger weiterer Ereignisse bei der (als zufällig angenommen) Kartenverteilung von 40 Karten auf 4 Spieler zu berechnen. Es ging um folgende acht Ereignisse:

- E<sub>1</sub>: Ich bekomme die 6 höchsten Trümpfe.
- E<sub>2</sub>: Ich bekomme als einzigen Trumpf ein Karo-As (einen "Fuchs").
- E<sub>3</sub>: Ich habe im 1. Stich das Ausspiel, mein blankes Herz-As und mein zweifach besetztes Kreuz-As gehen im 1. und 2. Stich durch, weil alle Mitspieler jeweils "bedienen" müssen.
- E<sub>4</sub>: Ich ziehe im 1. Stich mein blankes Herz-As aus, es geht durch, weil jeder Mitspieler eine Herz-Fehlkarte hat.
- E<sub>5</sub>: Mein blankes Kreuz-As geht im 1. Stich durch, weil alle Mitspieler bedienen müssen.
- E<sub>6</sub>: Ich bekomme nur Trumpfkarten.
- E<sub>7</sub>: Ich bekomme nur Fehlkarten.
- E<sub>8</sub>: Ich bekomme beide Kreuz-Damen (habe also eine "Hochzeit").

Bevor ich im Abschnitt 3 auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für diese Ereignisse genauer eingehe, möchte ich zunächst noch in Tab. 1 zusammenstellen, wie meine 5 Doppelkopffreunde am nächsten

Spielabend aufgrund ihrer Erfahrung aus mehreren Tausend Spielstunden die Wahrscheinlichkeiten eingeschätzt haben.

Die Schätzungen sollten für den Fall erfolgen, dass wir zu Viert mit 40 Karten (also ohne Neunen) spielen. <sup>2</sup> Die Schätzwerte sollten des besseren Verständnisses wegen als Antworten auf die Frage "Bei ungefähr wieviel korrekten Kartenausteilungen passiert es nach Deiner Meinung im Durchschnitt, dass die Karten folgendermaßen verteilt sind: ..." angegeben werden und wurden dann von mir notiert.

Ereignis → Spieler ↓	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>8</sub>
Elmar	100	2000	200	15	2	30	40	30
Manfred	1000	1000	100	40	4	200	100	40
Werner	500	200	50	30	10	100	100	50
Eritz	7000	10000	250	20	3	50	1000	80
Dieter	200	600	100	60	4	80	80	50

Tab. 1: Geschätzte Anzahlen von Kartenausteilungen, bei denen die betrachteten Ereignisse eintreten.

Auffallend sind die (auch anderswo beobachteten) stark differierenden Schätzwerte der einzelnen Spieler. Dies zeigt, dass selbst erfahrene Kartenspieler oft falsche oder nur sehr vage Vorstellungen bezüglich des Eintretens von zufälligen Ereignissen haben. Wie die späteren Berechnungen zeigen werden, wurden darüber hinaus tendenziell kleine Anzahlen als deutlich größer und große Anzahlen als deutlich kleiner eingeschätzt.

Sie, liebe Leserinnen und Leser, sollten nun den Mut haben, in die Tab. 1 auch Ihre Schätzwerte einzutragen, um sie später mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten vergleichen zu können.

## 2 Typisierung der Kartenverteilungen; Aufgabenvariationen

Sieht man sich die oben beschriebenen Ereignisse genauer an, so kann man zwei unterschiedliche Aufgabentypen erkennen:

- Bei den Ereignissen E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, E<sub>6</sub>, E<sub>7</sub> und E<sub>8</sub> interessiert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich ein bestimmtes "Blatt" bekomme.

<sup>1</sup>Informationen zum Doppelkopfspiel findet man im Internet, z. B. unter [www.bauw.unibw-muenchen.de/institute/inst10/people/bacher/eigene/doko.htm](http://www.bauw.unibw-muenchen.de/institute/inst10/people/bacher/eigene/doko.htm)

<sup>2</sup>Wenn 5 oder 6 Spieler anwesend sind (wie am Schätzabend), spielen bei uns alle gleichzeitig mit (nach besonders festgelegten Regeln).

- Bei den Ereignissen  $E_3$  bis  $E_5$  interessiert die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Kartenverteilung bei den Mitspielern unter der Voraussetzung, dass ich ein bestimmtes Blatt bekommen habe.

Weitere Aufgabentypen ergeben sich z. B., wenn man bei  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  und  $E_8$  jeweils "ich" durch "der Kartengeber" oder durch "wenigstens einer der Mitspieler" ersetzt oder wenn man etwa  $E_4$  ersetzt durch  $E_4^*$ : Ich bekomme als Ausspieler beim 1. Stich ein blankes Herz-As und die drei anderen Herz-Karten sind auf die drei Mitspieler verteilt.

Im Sinne von Schupp [1] bietet die Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten bei der Verteilung von Doppelkopfkarten aber auch noch zahlreiche Möglichkeiten der Aufgabenvariation. Beispiele hierfür sind:

- Man kann sich andere "Blätter" ausdenken (etwa  $E_9$ : ich bekomme nur Damen und Buben).
- Man kann die Beschreibung der "Blätter" stärker einengen, also bei  $E_8$  etwa "und genau 4 weitere Trümpfe" ergänzen.
- Man kann Spielregeln abändern.
- Man kann die Aufgabenstellungen umkehren, also z. B. die Aufgabe stellen: "Geben Sie Ereignisse A mit  $P(A)=P(E_7)$  an."
- Man kann die Wahrscheinlichkeit der betrachteten Ereignisse berechnen, wenn man
  - 48 Karten (mit den Neunen) auf 4 Mitspieler verteilt,
  - 40 Karten auf 5 Mitspieler oder 48 Karten auf 6 Mitspieler verteilt.
- Man kann (exemplarisch) rechnerisch überprüfen, ob sich die Art der Kartenausgabe (10, 10, 10, 10 oder 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3) auf die Wahrscheinlichkeit der betrachteten Ereignisse auswirkt.
- Man kann die Kartenverteilungen bei Skat oder Schafskopf betrachten.

### 3 Berechnung der Wahrscheinlichkeit einiger Ereignisse

Bei der nun folgenden Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gehe ich davon aus, dass der Leser die Karten und die grundlegenden Regeln beim Doppelkopf kennt; andernfalls müßte er sich (z. B. im Internet) kundig machen.

Die Überlegungen beschränken sich auf den Fall, dass

- 4 Spieler gleichzeitig mitspielen,
- jeder 10 Karten bekommt (also ohne Neunen gespielt wird),
- nach "normalen" Regeln gespielt wird (also z. B. ohne "Schweinchen").

Als wesentliche Hilfsmittel werden bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten Bäume, die hypergeometrische Verteilung und die Pfadregel(n) benutzt.

Der Einfachheit halber erhält jeder Mitspieler seine 10 Karten auf einmal, ich bekomme meine Karten als Erster. (Man kann sich sowohl gedanklich als auch auf rechnerischem Wege klar machen, dass die Reihenfolge der Verteilung der Karten keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeiten haben kann/darf. Mehr dazu findet der Leser im "Anhang" zu diesem Aufsatz).

Ich habe die Wahrscheinlichkeiten nicht nur als Dezimalzahlen angegeben, sondern auch in der Form  $1 : x_i$ . So kann man leichter vergleichen, wie stark die Schätzwerte meiner Doppelkopffreunde von den  $x_i$ -Werten abweichen. Erläuterungen zu einigen Ansätzen habe ich im "Anhang" zu diesem Aufsatz ergänzt.

$$P(E_1) = \frac{\binom{6}{40} \cdot \binom{34}{4}}{\binom{40}{10}} = 0,0000547 = 1 : 18278$$

$$P(E_2) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{22}{0} \cdot \binom{16}{9}}{\binom{40}{10}} = 0,0000270 = 1 : 37048$$

$$P(E_3) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{24}{8}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{16}{8}}{\binom{20}{10}} = 0,0614 = 1 : 16,3$$

$$P(E_4) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{27}{9}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{18}{9}}{\binom{20}{10}} = 0,246 = 1 : 4,1 \approx 1 : 4$$

$$P(E_5) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{25}{7}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{18}{9}}{\binom{20}{10}} \cdot 3 + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{25}{8}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{17}{8}}{\binom{20}{10}} \cdot 3 = 0,679 = 1 : 1,47 \approx 2 : 3$$

$$P(E_6) = \frac{\binom{24}{10} \cdot \binom{16}{0}}{\binom{40}{10}} = 0,00231 = 1 : 432$$

$$P(E_7) = \frac{\binom{24}{0} \cdot \binom{16}{10}}{\binom{40}{10}} = 0,00000945 = 1 : 105852$$

$$P(E_8) = \frac{\binom{2}{40} \cdot \binom{38}{8}}{\binom{40}{10}} = 0,0577 = 1 : 17,3$$

$$P(E_4^*) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{38}{9}}{\binom{40}{10}} \cdot \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{27}{9}}{\binom{30}{10}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{18}{9}}{\binom{20}{10}} = 0,0947$$

$$P(E_9) = \frac{\binom{16}{10} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{40}{10}} = P(E_7).$$

#### 4 Bitte an die Leserinnen und Leser

Ich würde gern meine Sammlung von Schätzwerten wesentlich erweitern und wäre Ihnen deshalb dankbar, wenn Sie in Ihrem Bekanntenkreis (Schüler, Studenten, Doppelkopfrunden) ähnliche Schätzungen wie ich durchführen und mir die Ergebnisse per mail mitteilen würden. (Auch Ihre eigenen Schätzwerte interessieren mich!) Anders als ich (Ereignisse vorgelesen, Schätzwerte aufgeschrieben) sollten Sie aber besser die Ereignisse in schriftlicher Form vorlegen (einschließlich der Aufgabenstellung) und die Schätzwerte von den Testpersonen dazu schreiben lassen. Die Testpersonen können dann einerseits besser überlegen, andererseits aber auch unabhängig voneinander antworten.

Für viele der Beteiligten dürfte dann der Anreiz groß sein, durch eigene Ansätze und Rechnungen herauszufinden, wie gut (bzw. schlecht) die Schätzungen waren.

#### Literatur

- [1] Schupp, H.: (2002) Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim, Berlin.

Anschrift des Verfassers:

Heinz Althoff

Ruschfeldweg 17

33619 Bielefeld

althoff@mathematik.uni-bielefeld.de

#### Anhang

Ich gehe jetzt noch auf einen Wunsch eines Gutachters ein und erläutere die Ansätze für die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse  $E_1, E_2, E_3, E_5$  und  $E_4^*$ . In allen Fällen werden 10 Karten aus den jeweils noch vorhandenen  $n$  Karten auf einmal entnommen und einem der Spieler überreicht. Die  $\binom{n}{10}$  verschiedenen Möglichkeiten, diese 10 Karten auszuwählen, haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{\binom{n}{10}}$ , es liegt also ein Laplace-Modell vor. Man benötigt jetzt noch die Anzahl der jeweils günstigen Versuchsfälle bei der Auswahl der 10 Karten.

Um diese Anzahl bei  $E_1$  zu ermitteln, teilt man die 40 Karten in zwei Klassen  $M_1$  (mit den 6 höchsten Trümpfen) und  $M_2$  (mit den 34 anderen Karten) auf. Zieht man nun aus  $M_1$  alle 6 Karten (dafür gibt

es  $\binom{6}{6}$  Möglichkeiten), aus  $M_2$  4 Karten (dafür gibt es  $\binom{34}{4}$  Möglichkeiten) und legt die gezogenen 10 Karten zusammen, so hat man ein für  $E_1$  günstiges Blatt bekommen. Die Anzahl der für  $E_1$  günstigen Blätter ergibt sich nach dem Grundlegenden Zählprinzip als Produkt  $\binom{6}{6} \cdot \binom{34}{4}$ . Damit ist dann  $P(E_1) = \frac{1}{\binom{40}{10}} \cdot \left[ \binom{6}{6} \cdot \binom{34}{4} \right] = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{34}{4}}{\binom{40}{10}}$ .

Bei  $E_2$  teilt man die 40 Karten in die Klassen  $M_1$  (mit den beiden Karo-Assen),  $M_2$  (mit den 22 weiteren Trümpfen) und  $M_3$  (mit den 16 Fehlkarten) auf.

Bei der Berechnung von  $P(E_3)$  bezieht sich der erste Bruch auf das Austeilen von 10 aus 30 noch vorhandenen Karten an den 1. Mitspieler und der zweite Bruch auf das Austeilen von 10 aus jetzt noch 20 vorhandenen Karten an den 2. Mitspieler. Welche Karten der 3. Mitspieler dann bekommt, liegt dadurch eindeutig fest, hat also die Wahrscheinlichkeit 1. Da hier ein zweistufiges Zufallsexperiment betrachtet wird, ergibt sich  $P(E_3)$  nach der Pfadregel als Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten in den beiden Teilversuchen.

Bei der Berechnung von  $P(E_5)$  muß man zwei alternative mögliche Fälle unterscheiden:

- ein Mitspieler bekommt 3 Kreuzkarten, die beiden anderen Mitspieler bekommen je 1 Kreuzkarte;
- zwei Mitspieler bekommen jeder 2 Kreuzkarten, der 3. Mitspieler bekommt 1 Kreuzkarte.

Wie bei  $P(E_3)$  gibt dann der jeweils 1. Bruch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der 1. Mitspieler das beschriebene Blatt bekommt, und der 2. Bruch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der 2. Mitspieler das beschriebene Blatt bekommt, an. Der Faktor 3 berücksichtigt, dass jeder der 3 Mitspieler die 3 Kreuzkarten bzw. als Einziger genau 1 Kreuzkarte bekommen kann. Pfad- und Summenregel liefern dann daraus den Ansatz für  $P(E_5)$ .

Beim Ansatz für  $P(E_4^*)$  gibt der 1. Bruch die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ich genau eines der beiden Herzasse bekomme. Der 2. Bruch gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Mitspieler, der nach mir seine 10 Karten bekommt, genau eine Herzfehlkarte bekommt. Analog bezieht sich der 3. Faktor auf den Mitspieler, der als Dritter seine 10 Karten bekommt. Der letzte Mitspieler braucht im Ansatz nicht berücksichtigt zu werden, da die Wahrscheinlichkeit für sein Blatt  $\frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{9}{9}}{\binom{10}{10}} = 1$  beträgt.

Der Gutachter hat mich auch noch gebeten, auf die Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten von der

Art des Austeilens der Karten einzugehen. Ich tue dies jetzt exemplarisch für  $P(E_1)$  und das Austeilverfahren  $(5, 5, 5, 5; 5, 5, 5, 5)$ . Das Verfahren läßt sich sowohl auf andere Austeilverfahren als auch auf die anderen Ereignisse übertragen, kann allerdings wegen der erforderlichen Fallunterscheidungen sehr aufwendig werden.

Während beim obigen Ansatz für  $P(E_1)$  nur ein Teilversuch (Auswahl der 10 Karten für mich) betrachtet werden mußte, sind jetzt 5 Teilversuche zu berücksichtigen (jeweils erste 5 Karten für mich, den 1. Mitspieler, den 2. Mitspieler und den 3. Mitspieler und dann noch die restlichen 5 Karten für mich auswählen). Dabei sind bei den ersten 5 Karten für mich noch 5 mögliche Fälle zu unterscheiden, anschließend jedoch keine weiteren Fallunterscheidungen erforderlich. Es ergibt sich

$$P(E_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{34}{0}}{\binom{40}{5}} \cdot \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{34}{5}}{\binom{35}{5}} \cdot \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{29}{5}}{\binom{30}{5}} \cdot \frac{\binom{1}{0} \cdot \binom{24}{5}}{\binom{25}{5}} \cdot \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{19}{4}}{\binom{20}{5}} \\
 &+ \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{34}{1}}{\binom{40}{5}} \cdot \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{33}{5}}{\binom{35}{5}} \cdot \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{28}{5}}{\binom{30}{5}} \cdot \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{23}{5}}{\binom{25}{5}} \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{18}{3}}{\binom{20}{5}} \\
 &+ \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{34}{2}}{\binom{40}{5}} \cdot \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{32}{5}}{\binom{35}{5}} \cdot \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{27}{5}}{\binom{30}{5}} \cdot \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{22}{5}}{\binom{25}{5}} \cdot \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{17}{2}}{\binom{20}{5}} \\
 &+ \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{34}{3}}{\binom{40}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{31}{5}}{\binom{35}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{26}{5}}{\binom{30}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{21}{5}}{\binom{25}{5}} \cdot \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{16}{1}}{\binom{20}{5}} \\
 &+ \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{34}{4}}{\binom{40}{5}} \cdot \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{30}{5}}{\binom{35}{5}} \cdot \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{25}{5}}{\binom{30}{5}} \cdot \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{25}{5}} \cdot \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{15}{0}}{\binom{20}{5}} \\
 &= 0,0000547
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung lohnt es sich, einige Termvereinfachungen vorzunehmen und einen Taschenrechner mit der Taste  $nCr$  für die Berechnung von Binomialkoeffizienten zu verwenden.