Nuancen der Nichtbeliebigkeit von Aktienkurs-Modellierungen

WOLFGANG STUMMER, KARLSRUHE

Zusammenfassung: *Dieser Artikel gibt eine elementar-didaktische, nuancierte Aufarbeitung der Fragestellung, ob man den ungewissen zukünftigen Aktienkursverlauf beliebig stochastisch modellieren darf. Diese Aufarbeitung ist derart gestaltet, dass sie prinzipiellerweise fast direkt für den fortgeschrittenen Mathematik-Schulunterricht einsetzbar ist; dementsprechend wird bewusst eine einfache, möglichst nicht-fachspezifische, und bedeutungsnahe Wortwahl verwendet, so dass für das Verständnis der hier behandelten Problematik keine ökonomischen und nur geringe probabilistische Vorkenntnisse vorausgesetzt werden müssen. Die gewählte Darstellungsweise sollte den Schülern bei der Festigung der folgenden mathematischen Fähigkeiten helfen: Die Erstellung von abstrahierenden Problembeschreibungen (deswegen wurden hier – bis auf zwei kleine Ausnahmen – bewusst keine expliziten Rechenbeispiele verwendet), die Beachtung von geringfügigen mathematischen Unterschieden, die Kunst der einfachen Beweisführung und Logik (inklusive des Ansatz- und des Analogieschluss-Gedankens), sowie der Umgang mit Ungleichungen und Ungleichungsketten.*

1 Einleitung

Wir benutzen das denkbar einfachste Modell für den Kursverlauf einer Aktie, wobei die Zeit in Jahren gemessen wird: Zum jetzigen Zeitpunkt $t = 0$ sei der Aktienkurs $A_0 > 0$ bekannt. Der Aktienkurs A_T zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T > 0$ (z. B. $T = 2$ Jahre) soll prognostiziert werden. Als in der Regel ungewisse Größe sei A_T durch eine verallgemeinert-binomialverteilte[1] Zufallsvariable beschrieben. Der Kurs A_t zu einem Zwischenzeitpunkt t (im Sinne von $0 < t < T$) wird in diesem Kontext ignoriert. Dieses Modell wurde von Cox, Ross & Rubinstein [1979] im Zusammenhang mit der Optionspreistheorie entwickelt, siehe hierzu auch die didaktisch wertvollen Artikel von Eberlein [1998], Bartels [1999], Pfeifer [2000] und Warmuth [2001] sowie die ebenfalls wertvollen Lehrbücher von Irle [1998] und Adelmeyer [2000]. Im Detail wird der Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$ gewählt, sowie die Potenzmenge $\ = \wp(\Omega)$ als zugehörige σ-Algebra. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P wird fixiert durch

$$P[\omega_1] \;=\; p, \quad P[\omega_2] \;=\; 1-p,$$

mit $0 < p < 1$. Die Zufallsvariable $A_T(\omega)$ wird wie folgt definiert:

$$\boxed{A_T(\omega) = \begin{cases} uA_0 & \text{falls } \omega = \omega_1, \\ & \qquad\qquad\qquad \text{mit } 0 < d < u. \\ dA_0 & \text{falls } \omega = \omega_2, \end{cases}}$$

Die Symbole u bzw. d stehen dabei traditionellerweise für „up“ bzw. „down“, obwohl ad hoc *nicht* angenommen wird, dass $u > 1$ bzw. $d < 1$ gelten muss; denkbar wären prinzipiellerweise z. B. auch die beiden Situationen

(α) $u < 1, d < 1$ (sichere Abnahme des Aktienkurses), und

(β) $u > 1, d > 1$ (sichere Zunahme).

Man beachte auch das Ausklammern der beiden Fälle $p = 0$ bzw. $p = 1$, die den (bei nicht allzu kleinem T) unrealistischen Situationen entsprechen, bei denen der zukünftige Aktienkursverlauf bereits jetzt „mit Sicherheit“ bekannt ist.

Die beiden Größen u und d können wie folgt ökonomisch interpretiert werden:

- $u = \dfrac{A_T(\omega_1)}{A_0}$ ist der *Kapitalveränderungsfaktor* der Aktie im günstigeren Ausgang $\omega = \omega_1$,
- $d = \dfrac{A_T(\omega_2)}{A_0}$ ist der *Kapitalveränderungsfaktor* der Aktie im ungünstigeren Ausgang $\omega = \omega_2$.

Der Kapitalveränderungsfaktor gibt an, um welchen Faktor sich ein zum Zeitpunkt $t = 0$ eingesetztes Kapital (z. B. 1 Euro) bis zum zukünftigen Zeitpunkt $t = T$ verändert hat. Nimmt dieser Faktor z. B. den Wert 2 an, dann hat sich das Kapital verdoppelt; beim Wert $1/2$ hat sich das Kapital halbiert. Anmerkend sei hier erwähnt, dass anstelle des Wortes Kapitalveränderungsfaktor in der ökonomischen Literatur sehr häufig das Wort *Kapitalsteigerungsfaktor* verwendet wird, das jedoch für Werte unter 1 etwas irreführend ist (man spricht dann von *negativer Steigerung*).

[1] Der Zusatz „verallgemeinert“ spiegelt die Tatsache wider, dass die beiden möglichen Ausgänge nicht die Werte 0 und 1 bzw. -1 und 1 induzieren, sondern allgemeinere reellwertige Zahlen.

Die obigen Interpretationen von u und d sind äußerst hilfreich, die nachfolgenden mathematischen Aussagen ökonomisch intuitiv zu deuten.

Man beachte, dass bislang der zukünftige Aktienkurs A_T „beliebig“ modelliert wurde; wir machten lediglich die Einschränkungen $u > 0$ und $d > 0$ um sinnvollerweise $A_T > 0$ zu garantieren, sowie $u \neq d$ und (o. B. d. A.) $u > d$ um den Fall der absoluten Gewissheit auszuschließen.

Im Folgenden wollen wir der Frage nachgehen, ob man weitere mathematischen Einschränkungen für die Modellierung des Aktienkurses A_T zum Zeitpunkt T benötigt.

2 Portfolios und Marktbeschreibung

Rein technisch-mathematisch gesehen spricht natürlich nichts für eine weitere Einschränkung, aber es bestehen tiefliegende ökonomische Gründe. Aus Kompatibilitätsgründen werden letztere wiederum mathematisch formuliert. Dieser etwas langwierige Schritt wird in diesem und im nächsten Abschnitt näher ausgeführt:

Man trifft z. B. die Annahme, dass zusätzlich zur Aktie auch ein Bankguthaben als weitere Investitionsmöglichkeit zur Verfügung steht. Aus Vereinfachungsgründen wird dieses Bankguthaben als Finanzinstrument mit heutigem Wert $B_0 := 1$ und *sicherem* Wert $B_T = (1+\rho)^T$ zum Zeitpunkt T dargestellt; dementsprechend macht es Sinn, vom *Einheits-Bankguthaben* (EBG) zu sprechen. Dabei ist $\rho \geq 0$ die in Dezimalen ausgedrückte jährliche Verzinsung des Bankguthabens; so entspricht etwa $\rho = 0.02$ einem jährlichen Zinssatz von 2%.

Im vorliegenden Modell hat man nun die Möglichkeit, (ausschließlich) zum Zeitpunkt $t = 0$ ein gegebenes Anfangskapital C strategisch im „Finanzmarkt“ $\big\{$Einheits-Bankguthaben, Aktie$\big\}$ anzulegen; dabei sei vereinfachenderweise angenommen, dass keine Gebühren (Transaktionskosten) anfallen. Die daraus resultierende gehaltene Stückanzahl an der Aktie sei mit y und die gehaltene Stückanzahl am Einheits-Bankguthaben sei mit x bezeichnet. Das Paar $\{x,y\}$ wird meistens als *Handelsstrategie* oder *Portfolio/Portefeuille* bezeichnet. Der entsprechende jetzige Gesamtwert V_0 des Portfolios ist dann

$$V_0 \;=\; xB_0 + yA_0.$$

Wegen der o. a. Transaktionskostenannahme gilt also $C = V_0$. Es wird ferner angenommen, dass der Investor bis zum zukünftigen Zeitpunkt T nicht weiter handelt. Der ungewisse Gesamtwert V_T seines Portfolios zur Zeit T wird durch die Zufallsvariable

$$V_T(\omega) \;=\; xB_T + yA_T(\omega), \qquad \omega \in \{\omega_1, \omega_2\},$$

beschrieben.

Bevor wir mit Hilfe von Handelsstrategien $\{x,y\}$ die oben angedeuteten ökonomischen Grundprinzipien formulieren, seien an dieser Stelle noch einige ergänzende technische, teilweise idealisierende Annahmen getroffen:

- Die „Stückzahlen“ x und y sind beliebige reelle Zahlen, sie müssen also insbesondere keine natürlichen Zahlen sein; dabei entspricht $x > 0$ einem Guthaben im wahrsten Sinn[2], $x < 0$ dem Eingehen von Kredit-Schulden[3], $y > 0$ dem Besitz von Aktienanteilen, und $y < 0$ der „Verschuldung“ in Aktienanteilen („Leerverkauf“[4]). Insbesondere bedeutet dies, dass grundsätzlich ein uneingeschränkt großes Anfangskapital ($C > 0$) bzw. ein uneingeschränkt großes Anfangskreditvolumen ($C < 0$) als Ressourcen für eine Veranlagung zur Verfügung stehen können,
- es existieren keine Leerverkaufsbeschränkungen,
- es müssen keine Steuern bezahlt werden,
- Annahmen über die „Rationalität“ der Marktteilnehmer bzw. des vorliegenden Marktes, auf die hier nicht explizit eingegangen wird, die aber in der nachfolgenden Darstellung mehr oder weniger implizit mitberücksichtigt werden.

3 Spezielle Handelsstrategien und Aktienkurs-Modell-Einschränkungen

Als Baustein für das erste ökonomische Grundprinzip betrachten wir folgende spezielle Anlage-Möglichkeiten:

[2] d. h. ein strikt positiver Bankguthabenanteil

[3] Implizit wird durch diese Konstruktion also angenommen, dass die Kreditzinsen genauso hoch wie die Guthabenzinsen sind.

[4] Dabei leiht man sich kurz vor dem Zeitpunkt $t = 0$, z. B. von Verwandten, kostenlos Aktien(-anteile) und verkauft diese gleich anschließend zum Zeitpunkt $t = 0$; man muss jedoch zum Zeitpunkt T die gleichen Aktien(-anteile) wieder zurückkaufen und den Verwandten zurückgeben.

Definition 3.1 *Eine Handelsstrategie* $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}$ *heißt* ***gewinninduzierende Verschuldungs-Strategie*** (*kurz*: ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie*) *für den Markt* $\{$*Einheits-Bankguthaben, Aktie*$\}$, *falls gilt*:

$(\widetilde{i})$ $\widetilde{V}_0 := \widetilde{x}B_0 + \widetilde{y}A_0 < 0,$

$(\widetilde{ii})$ $\widetilde{V}_T(\omega) := \widetilde{x}B_T + \widetilde{y}A_T(\omega) \geq 0 \quad$ für $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$.

Diese Handelsstrategie bedeutet, dass man sich zum jetzigen Zeitpunkt $t = 0$ im Markt $\{$Einheits-Bankguthaben, Aktie$\}$ insgesamt verschuldet und trotzdem zum zukünftigen Zeitpunkt T auf jeden Fall schuldenfrei endet. Die jetzige Verschuldung $\widetilde{V}_0 < 0$ einer gewinninduzierenden Verschuldungs-Strategie ergibt sich etwa durch eine Kreditaufnahme ($\widetilde{x} < 0$), die dann – nicht zur Gänze – unmittelbar anschließend für den Kauf von Aktienanteilen ($\widetilde{y} > 0$) verwendet wird. Da der Rest des Kredites „ohne Zukunftssorgen“ in ein Mittagessen „investiert“ werden kann, wird eine gewinninduzierende Verschuldungs-Strategie meistens als *Free Lunch* bezeichnet. Aus didaktischen Gründen bevorzugen wir an dieser Stelle die erstgenannte Namensgebung, da sie erstens viel präziser den zugrundeliegenden Sachverhalt widerspiegelt (u. a. dass das zu benennende Objekt dem Wesen nach eine spezielle Strategie ist), sowie zweitens die Bezeichnung Free Lunch in der Fachliteratur uneinheitlich für mehrere verschieden definierte Arten von Strategien verwendet wird. Anstatt des Ausdrucks *gewinninduzierende Verschuldungs-Strategie* könnte man in der Schule beispielsweise auch den etwas plakativeren aber unpräziseren Namen *übriges-Taschengeld-Strategie* einsetzen. Unabhängig davon werden wir aus Platzspargründen im Folgenden stets die bereits oben erwähnte, leicht zu memorisierende Abkürzung ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* verwenden. Dabei beschreibt der linke Index das Vorzeichen des Portfolio-Wertes zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie der rechte Index das Vorzeichen des Portfolio-Wertes zum Zeitpunkt $t = T$. Dieses Merksystem werden wir später sinngemäß auch auf andere Handelsstrategien anwenden.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass die Existenz einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}$ von vielen/allen Investoren ausgenützt wird, und zwar möglichst maximal, denn auch jedes Vielfache $\{\lambda\widetilde{x},\lambda\widetilde{y}\}$, $\lambda > 0$, einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* ist wieder eine ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie*. Im obigen Beispielszenario ($\widetilde{x} < 0$, $\widetilde{y} > 0$) würde sich eine starke Nachfrage nach Aktien(-anteilen) ergeben, was wiederum – nach dem Gesetz von Angebot und Nachfrage – eine „sofortige“ Erhöhung des jetzigen Aktienpreises A_0, und somit das Verschwinden von ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategien* bewirken würde. Im Leerverkaufsfall $\widetilde{y} < 0$ kann man ähnlich argumentieren; durch das entstehende Überangebot an Aktien(-anteilen) würde A_0 sinken. Die Existenz einer (und somit unendlich vieler) ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie(n)* wird also in der Regel nicht lange anhalten. Deshalb macht es Sinn, Märkte zu betrachten, die folgende Grundvoraussetzung erfüllen:

Grundprinzip 3.2 (***NO***${}_{<0}$***STR***${}_{\geq 0}$) *Im Markt* $\{$*Einheits-Bankguthaben, Aktie*$\}$ *existieren keine gewinninduzierenden Verschuldungs-Strategien.*

Dabei steht der Zusatz *NO* im Kürzel für die (aufgrund der geringeren Länge ausgewählte) englische Übersetzung des Wortes *keine*. Das in der Definition 3.2 beschriebene ökonomische Grundprinzip führt notwendigerweise zu folgender mathematischen Einschränkung an u und d:

Theorem 3.3 *Es gilt folgende Äquivalenz*:

$$\text{(a)}\ NO_{<0}STR_{\geq 0} \iff \text{(b)}\ d \leq (1+\rho)^T \leq u.$$

Die Bedingung (b) besagt, dass der Kapitalveränderungsfaktor $(1+\rho)^T$ der *sicheren* Anlagemöglichkeit Einheits-Bankguthaben stets zwischen den beiden möglichen Kapitalveränderungsfaktoren der *unsicheren* Anlagemöglichkeit Aktie liegt. Da trivialerweise $(1+\rho)^T \geq 1$ ist, kann somit – falls $NO_{<0}STR_{\geq 0}$ gilt – der Fall (α) in der Einleitung nicht mehr auftreten; im Gegensatz dazu ist die in (β) angeführte Situation – bei entsprechender Konstellation zwischen u, d, ρ und T – prinzipiellerweise möglich.

BEWEIS: Nach den fundamentalen Gesetzen der Logik ist die Aussage $(a) \iff (b)$ gleichwertig mit der Aussage $\neg(a) \iff \neg(b)$; die darin involvierte Negation $\neg(a)$ der Aussage (a) zieht die *direkte* Verwendungsmöglichkeit der Definition 3.1 nach sich. Dementsprechend zeigen wir zuerst

I. $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$:
Vorausgesetzt sei also, dass entweder $d > (1+\rho)^T$ oder $u < (1+\rho)^T$ gilt; unter dieser Voraussetzung muss man sich eine ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* konstruieren. Wir unterscheiden die beiden Fälle

(Ia) $d > (1+\rho)^T$ und
(Ib) $(1+\rho)^T > u$.

Im ersten Fall besitzt die unsichere Anlage (Aktie) in jedem der beiden möglichen Ausgänge ω_1 und ω_2

einen höheren Kapitalveränderungsfaktor als die sichere Anlage (Bankguthaben). Im Fall (Ib) hat die unsichere Anlage stets einen niedrigeren Kapitalveränderungsfaktor als die sichere Anlage.
Im Fall (Ia) erweist sich (auch im Hinblick auf eine spätere Nuancierung) folgender Ansatz als zweckmäßige Vorgehensweise bei der Suche nach einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie*:

$$\{\tilde{x},\tilde{y}\} := \{-kA_0, l\}, \text{ mit } 0 < l < k. \qquad (1)$$

Darauf aufbauend konstruiert man sich die nachfolgende Tabelle 1. Deren Einträge beschreiben – für verschiedene Zeitpunkte und für verschiedene Ausgänge – die jeweiligen gehaltenen Vermögenswerte (und nicht die Stückzahlen) am Einheits-Bankguthaben bzw. an der Aktie, sowie deren Gesamtsumme; letztere ergibt den entsprechenden Portfoliowert.

	$t=0$	$t=T$	
		ω=ω_1	ω=ω_2
EBG	$-kA_0$	$-kA_0(1+\rho)^T$	$-kA_0(1+\rho)^T$
Aktie	lA_0	lA_0u	lA_0d
Ges	$\tilde{V}_0 =$ $(l-k)A_0$	$\tilde{V}_T(\omega_1) = A_0\cdot$ $\left(lu-k(1+\rho)^T\right)$	$\tilde{V}_T(\omega_2) = A_0\cdot$ $\left(ld-k(1+\rho)^T\right)$

Tabelle 1: Portfolio-Entwicklung unter Handelsstrategie (1)

Aufgrund von (1) und der Grundannahme $A_0 > 0$ folgt klarerweise $\widetilde{V}_0 < 0$. Des Weiteren gilt wegen $u > d > 0$ stets $\widetilde{V}_T(\omega_1) > \widetilde{V}_T(\omega_2)$. Somit erhält man die schließlich gewünschte Eigenschaft $\widetilde{V}_T(\omega_2) \geq 0$ dann und nur dann, wenn gilt: $l \geq k\ \frac{(1+\rho)^T}{d}$. Anmerkend sei hier erwähnt, dass – aufgrund der Annahme $(1+\rho)^T < d$ – die letzte Ungleichung im Einklang mit der in (1) gestellten Forderung $0 < l < k$ steht. Die exemplarische Parameterwahl $k = 1$ und $l = \frac{(1+\rho)^T}{d}$ führt konsequenterweise zu einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie*. In Worten ausgedrückt nimmt man bei der entsprechenden Handelsstrategie einen Kredit in Höhe des heutigen Aktienpreises auf und kauft $\frac{(1+\rho)^T}{d}$ „Stücke“ der Aktie. Zur Illustration betrachte man den (mehr auf das Kopfrechnen als auf die konkrete Praxisrelevanz ausgerichteten) folgenden Datensatz 1: $T = 2$ Jahre, $\rho = 0.1$, $A_0 = 10$ Euro, $d = 2.42$ und $u = 3$ (somit modelliert man, dass der Aktienkurs in 2 Jahren auf entweder 24.2 Euro oder 30 Euro anwächst). Klarerweise ist (Ia) erfüllt. Mit der Auswahl $k = 1$ und $l = \frac{(1+0.1)^2}{2.42} = \frac{1}{2}$ konkretisiert sich die Tabelle 1 wie folgt:

	$t=0$	$t=2$	
		ω=ω_1	ω=ω_2
EBG	-10	$-10\ \cdot(1+0.1)^2$	$-10\ \cdot(1+0.1)^2$
Aktie	$\frac{1}{2}\ \cdot\ 10$	$\frac{1}{2}\ \cdot\ 10\ \cdot\ 3$	$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2.42$
Ges	$\tilde{V}_0 =$ $-\frac{1}{2}\cdot 10$ $=-5$	$\tilde{V}_T(\omega_1) = 10\cdot$ $\left(\frac{3}{2}-1.21\right)$ $=2.9$	$\tilde{V}_T(\omega_2) = 10\cdot$ $\left(\frac{2.42}{2}-1.21\right)$ $=0$

Tabelle 1^{Bsp}: Portfolio-Entwicklung für Illustrations-Datensatz 1

Im Fall (Ib) wählen wir – in antisymmetrischer Analogie zum Fall (Ia) – für die Suche nach einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* folgenden Ansatz:

$$\{\tilde{x},\tilde{y}\} := \{+kA_0, -l\}, \text{ mit } 0 < k < l. \qquad (2)$$

Darauf aufbauend konstruiert man sich die nachstehende Tabelle 2:

	$t=0$	$t=T$	
		ω=ω_1	ω=ω_2
EBG	kA_0	$kA_0(1+\rho)^T$	$kA_0(1+\rho)^T$
Aktie	$-lA_0$	$-lA_0u$	$-lA_0d$
Ges	$\tilde{V}_0 =$ $(k-l)\ A_0$	$\tilde{V}_T(\omega_1) = A_0\cdot$ $\left(k(1+\rho)^T-lu\right)$	$\tilde{V}_T(\omega_2) = A_0\cdot$ $\left(k(1+\rho)^T-ld\right)$

Tabelle 2: Portfolio-Entwicklung unter Handelsstrategie (2)

Der Ansatz (2) impliziert wiederum $\widetilde{V}_0 < 0$. Außerdem folgt aus $u > d > 0$ im Gegensatz zu Fall (Ia) die Ungleichung $\widetilde{V}_T(\omega_2) > \widetilde{V}_T(\omega_1)$. Der kleinere dieser beiden Portfoliowerte ist aber genau dann ≥ 0, wenn gilt: $l \leq k\ \frac{(1+\rho)^T}{u}$. Die Fall–(Ib)–Annahme $(1+\rho)^T > u$ sorgt dafür, dass dies kein Widerspruch zur Ansatz-Forderung $0 < k < l$ ist. Somit kann man zum Beispiel $l = 1$ und $k = \frac{u}{(1+\rho)^T}$ wählen, um eine ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* zu erhalten. Dies bedeutet, dass man genau 1 Aktie leerverkauft und (unmittelbar anschließend) den Betrag $\frac{uA_0}{(1+\rho)^T}$ in das Einheits-Bankguthaben investiert[5]. Diese sinnvolle Reihenfolge der Vorgehensweise könnte man in der Tabelle 2 dadurch zum Ausdruck bringen, indem man die Zeile mit den Aktien-Einträgen *über* der Zeile mit den EBG-Einträgen plaziert; aus Gründen der direkteren Vergleichbarkeit der beiden Tabellen 1 und 2 wurde hier darauf verzichtet. Folgender Datensatz 2 dient wiederum zur Illustration der Methodik: $T = 2$

[5] d. h. ein positives Bankguthaben in dieser Höhe aufbaut

Jahre, $\rho = 0.1$, $A_0 = 10$ Euro, $d = 0.8$ und $u = 1.089$ (d. h. dass in diesem Modell der Aktienkurs in 2 Jahren entweder auf 8 Euro fällt oder auf 10.89 Euro anwächst). Dies impliziert die Gültigkeit der Bedingung (Ib). Mit der Auswahl $l = 1$ und $k = \frac{1.089}{(1+0.1)^2} = \frac{9}{10}$ erhält man folgende Konkretisierung der Tabelle 2:

	$t=0$	$t=2$	
		$\omega{=}\omega_1$	$\omega{=}\omega_2$
EBG	$\frac{9}{10}\cdot 10$	$\frac{9}{10}\cdot 10\cdot(1+0.1)^2$	$\frac{9}{10}\cdot 10\cdot(1+0.1)^2$
Aktie	-10	$-10\cdot 1.089$	$-10\cdot 0.8$
Ges	$\widetilde{V}_0 =$ $-0.1\cdot 10$ $= -1$	$\widetilde{V}_T(\omega_1) = 10\cdot$ $\left(\frac{9}{10}\cdot 1.21 - 1.089\right)$ $= 0$	$\widetilde{V}_T(\omega_2) = 10\cdot$ $\left(\frac{9}{10}\cdot 1.21 - 0.8\right)$ $= 2.89$

Tabelle 2^{Bsp}: Portfolio-Entwicklung für Illustrations-Datensatz 2

Abschließend beweisen wir die Umkehrung

II. $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$**:**
Vorausgesetzt sei also, dass eine ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}$ existiert. Die Bedingung $(\widetilde{i})$ der Definition 3.1 ist trivialerweise äquivalent zur Ungleichung

$$\widetilde{x} \; < \; -\widetilde{y}\,A_0 \; . \tag{3}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen $A_T(\omega_1) = uA_0$ und $A_T(\omega_2) = dA_0$ in die Bedingung $(\widetilde{ii})$ der Definition 3.1 ergeben sich die Ungleichungen

$$\widetilde{x} \; \geq \; -\widetilde{y}\,A_0\,\frac{u}{(1+\rho)^T} \tag{4}$$

und

$$\widetilde{x} \; \geq \; -\widetilde{y}\,A_0\,\frac{d}{(1+\rho)^T} \; . \tag{5}$$

Aus (3) und (4) folgt sofort $\widetilde{y} \neq 0$. Deshalb genügt es (wegen der Grundannahme $A_0 > 0$) folgende beiden Fälle zu unterscheiden:

Fall (IIa): $\widetilde{y} > 0$:
Durch Zusammenlegen der beiden Ungleichungen (3) und (4) und anschließendem Durchdividieren durch $\widetilde{y}$ ergibt sich die Ungleichungskette

$$-A_0 \; > \; \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{y}} \; \geq \; -A_0\,\frac{u}{(1+\rho)^T} \; .$$

Insbesondere folgt daraus

$$\frac{u}{(1+\rho)^T} \; > \; 1 \; . \tag{6}$$

Durch analoges Vorgehen mit den beiden Ungleichungen (3) und (5) erhält man

$$-A_0 \; > \; \frac{\widetilde{x}}{\widetilde{y}} \; \geq \; -A_0\,\frac{d}{(1+\rho)^T}$$

und konsequenterweise

$$\frac{d}{(1+\rho)^T} \; > \; 1 \; . \tag{7}$$

Summa summarum impliziert die Existenz einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* – im vorliegenden Fall (IIa) – die zu (7) äquivalente Ungleichung $d > (1+\rho)^T$, also (Ia); die sich aus (6) ergebende zweite Folgerung $u > (1+\rho)^T$ liefert aufgrund der Grundannahme $u > d > 0$ keinen neuen Beitrag.

Fall (IIb): $\widetilde{y} < 0$:
Die Vorgehensweise ist analog zu Fall (IIa), nur mit dem Unterschied, dass sich alle Ungleichheitszeichen umdrehen. Daraus ergeben sich die Folgerungen $d < (1+\rho)^T$ und $u < (1+\rho)^T$ (also (Ib)), von denen die erste wegen $u > d > 0$ keinen neuen Beitrag liefert.

Insgesamt impliziert die Existenz einer ${}_{<0}STR_{\geq 0}$*–Strategie* entweder $d > (1+\rho)^T$ oder $u < (1+\rho)^T$; dies entspricht aber genau $\neg(b)$. □ Im Zuge der angestrebten nuancierten Darstellung der in diesem Artikel behandelten Grundproblematik betrachten wir als nächstes die folgenden speziellen Anlage-Möglichkeiten:

Definition 3.4 *Eine Handelsstrategie* $\{\widehat{x},\widehat{y}\}$ *heißt* ***sichere Gewinn-Strategie*** *(kurz:* ${}_{0}STR_{>0}$*–Strategie) für den Markt* $\{$*Einheits-Bankguthaben, Aktie*$\}$*, falls gilt:*

$(\widehat{i})$ $\widehat{V}_0 := \widehat{x}B_0 + \widehat{y}A_0 = 0$,

$(\widehat{ii})$ $\widehat{V}_T(\omega) := \widehat{x}B_T + \widehat{y}A_T(\omega) > 0$ für $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$.

Bei der Handelsstrategie $\{\widehat{x},\widehat{y}\}$ stellt man sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Markt $\{$Einheits-Bankguthaben, Aktie$\}$ ein Portfolio mit Gesamtwert 0 zusammen, und zum zukünftigen Zeitpunkt T erzielt man daraus *mit Sicherheit* einen *echten* Gewinn.

Das zugehörige ökonomische Grundprinzip lautet:

Grundprinzip 3.5 ($\boldsymbol{NO_0STR_{>0}}$**)** *Im Markt* $\{$*Einheits-Bankguthaben, Aktie*$\}$ *existieren keine sicheren Gewinn-Strategien.*

Die folgende Aussage zeigt, dass die beiden bis zu diesem Punkt behandelten Grundprinzipien gleichwertig sind:

Theorem 3.6 *Es gilt folgende Äquivalenz*:

$$\text{(a) } NO_{<0}STR_{\geq 0} \iff \text{(b) } NO_0STR_{>0}.$$

Bemerkungen:
(B1) Da für jede ${}_0STR_{>0}$–*Strategie* $\{\widehat{x},\widehat{y}\}$ auch $\{\lambda\widehat{x},\lambda\widehat{y}\}$, $\lambda > 0$, eine ${}_0STR_{>0}$–*Strategie* ist, kann der durch eine ${}_0STR_{>0}$–*Strategie* zu erzielende Gewinn zum Zeitpunkt T beliebig groß gemacht werden.
(B2) Für den Begriff *sichere Gewinn-Strategie* wird – so wie für den Begriff *gewinninduzierende Verschuldungs-Strategie* – in der Literatur üblicherweise die Bezeichnung *Free Lunch* gewählt. (Unter anderem) Aus offensichtlichen didaktischen Differenzierungsgründen haben wir die beiden erstgenannten, unterschiedlichen Begriffe (anstelle von Free Lunch) verwendet. In Fortsetzung der – im Anschluss an Definition 3.1 geführten – Namensgebungs-Diskussion könnte man anstatt des Ausdrucks *sichere Gewinn-Strategie* in der Schule beispielsweise auch den plakativeren aber unpräziseren Namen *No-Risk-Just-Fun-Strategie* verwenden.
(B3) Aufgrund des vorliegenden Theorems 3.6 kann in Theorem 3.3 die Bedingung $NO_{<0}STR_{\geq 0}$ äquivalenterweise durch $NO_0STR_{>0}$ ersetzt werden.

BEWEIS: Wir zeigen wiederum $\neg(a) \iff \neg(b)$.

I. $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$:
Es sei $\{\widehat{x},\widehat{y}\}$ eine ${}_0STR_{>0}$–*Strategie*. Wir definieren $z := \min\{\widehat{V}_T(\omega_1),\widehat{V}_T(\omega_2)\} > 0$, $\widetilde{x} := \widehat{x} - zB_0/B_T$ und $\widetilde{y} := \widehat{y}$. Dann ist $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}$ eine ${}_{<0}STR_{\geq 0}$–*Strategie*, denn das Nachrechnen der Definition 3.1 ergibt

$$\widetilde{V}_0 \;=\; \widehat{x}B_0 + \widehat{y}A_0 - z\frac{B_0^2}{B_T} \;=\; -\frac{z}{B_T} \;<\; 0 \quad \text{und}$$

$$\widetilde{V}_T(\omega) \;=\; \widehat{x}B_T + \widehat{y}A_T(\omega) - zB_0 \;\geq\; z - z \;=\; 0 \quad \text{für} \quad \omega = \omega_1 \text{ und } \omega = \omega_2.$$

II. $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$**:**
Es sei $\{\widetilde{x},\widetilde{y}\}$ eine ${}_{<0}STR_{\geq 0}$–*Strategie* mit zugehörigem Anfangs-Portfoliowert $\widetilde{V}_0 < 0$. Die Konstruktion $\widehat{x} := \widetilde{x} - \widetilde{V}_0$, und $\widehat{y} := \widetilde{y}$ ergibt eine ${}_0STR_{>0}$–*Strategie*; durch Nachrechen der Definition 3.4 sieht man nämlich sofort

$$\widehat{V}_0 \;=\; \widetilde{x}B_0 + \widetilde{y}A_0 - \widetilde{V}_0B_0 \;=\; 0 \quad \text{und}$$

$$\widehat{V}_T(\omega) \;=\; \widetilde{x}B_T + \widetilde{y}A_T(\omega) - \widetilde{V}_0B_T \;>\; 0 \quad \text{für} \quad \omega = \omega_1 \text{ und } \omega = \omega_2.$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus Eigenschaft $(\widetilde{ii})$ von Definition 3.1. □

4 Risikolose Gewinnchancen und Aktienkurs-Modell-Einschränkungen

Definition 3.4 gibt Anlass zur Betrachtung der folgenden, etwas allgemeineren Anlage-Möglichkeiten:

Definition 4.1 *Eine Handelsstrategie* $\{\overline{x},\overline{y}\}$ *heißt* ***risikolose Gewinnchance-Strategie*** (*kurz*: ${}_0STR_{\gneqq 0}$–*Strategie*) *für den Markt* $\{$*Einheits-Bankguthaben, Aktie*$\}$*, falls gilt*:

$(\overline{i})$ $\overline{V}_0 := \overline{x}B_0 + \overline{y}A_0 = 0$,

$(\overline{ii})$ $\overline{V}_T(\omega) := \overline{x}B_T + \overline{y}A_T(\omega) > 0$ für $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$,

$(\overline{iii})$ $\overline{V}_T(\omega) > 0$ für mindestens eines der beiden $\omega \in \{\omega_1,\omega_2\}$.

Die Nullnormierung des anfänglichen Portfolio-Wertes $\overline{V}_0$ spielt keine essentielle Rolle, sorgt aber für die Vermeidung einer Debatte über die Miteinbeziehung der Verzinsung des Startkapitals $C = \overline{V}_0$. Im Gegensatz zu einer ${}_0STR_{>0}$–*Strategie* hat man bei einer ${}_0STR_{\gneqq 0}$–*Strategie* zum zukünftigen Zeitpunkt T zwar *keinen sicheren* echten Gewinn mehr, aber immerhin mit Sicherheit keinen Verlust und mit positiver Wahrscheinlichkeit (p oder/und $1-p$) einen echten Gewinn, also eine Gewinnchance bei gleichzeitigem Nichtvorhandensein eines Verlustrisikos.

Als Anmerkung sei hier erwähnt, dass anstatt des Ausdrucks *risikolose Gewinnchance-Strategie* üblicherweise die schuldidaktisch nicht sehr bedeutungsnahe Fachbezeichnung *Arbitrage-Strategie* verwendet wird; in weiterer Fortsetzung der – im Anschluss an Definition 3.1 begonnenen und in Bemerkung (B2) nach dem Theorem 3.6 wieder aufgenommenen – Namensgebungs-Diskussion wäre es beispielsweise auch möglich, in der Schule den plakativeren aber unpräziseren Ausdruck *No - Risk - Maybe - Fun - Strategie* einzusetzen.

Aufgrund von analogen Argumenten wie im Vorfeld der Formulierung von $NO_{<0}STR_{\geq 0}$ macht es Sinn, Märkte zu studieren, die folgende Voraussetzung erfüllen:

Grundprinzip 4.2 ($\boldsymbol{NO_0STR_{\gneqq 0}}$**)** *Im Markt* $\{$*Einheits-Bankguthaben, Aktie*$\}$ *existieren keine risikolosen Gewinnchance-Strategien.*

Dieses ökonomische Grundprinzip führt zu noch stärkeren Einschränkungen an die stochastische Aktienkurs-Modellierung als $NO_{<0}STR_{\geq 0}$ bzw. $NO_0STR_{>0}$:

Theorem 4.3 *Es gilt folgende Äquivalenz*:

(a) $NO_0STR_{\gneqq 0} \iff$ (b) $d < (1+\rho)^T < u$.

Im Gegensatz zu Theorem 3.3 muss hier der Kapitalveränderungsfaktor der *sicheren* Anlagemöglichkeit Bankguthaben stets *strikt* zwischen den beiden möglichen Kapitalveränderungsfaktoren der *unsicheren* Anlagemöglichkeit Aktie liegen.

BEWEIS: Man zeigt $\neg(a) \iff \neg(b)$.
I. $\neg(b) \Rightarrow \neg(a)$:
Man kann völlig analog zum Teil **I** des Beweises von Theorem 3.3 vorgehen, mit dem einzigen Unterschied dass man $l = k = 1$ setzt (und man natürlich $\tilde{}$ durch $\bar{}$ ersetzt).
II. $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$**:**
Auch hier wählen wir eine Vorgehensweise, die sehr ähnlich zu derjenigen des Teils **II** des Beweises von Theorem 3.3 ist, nur im Detail etwas differenzierter. Es sei also angenommen, dass eine ${}_0STR_{\gneqq 0}$*–Strategie* $\{\bar{x},\bar{y}\}$ existiere. Die Bedingung $(\bar{i})$ der Definition 4.1 ist äquivalent zur Gleichung

$$\bar{x} \; = \; -\,\bar{y}\,A_0 \; . \tag{8}$$

Dies impliziert jedoch – unter Zuhilfenahme der Bedingung $(\overline{iii})$ der Definition 4.1 – dass $\bar{y} \neq 0$ ist. Durch explizites Einsetzen der Beziehungen $A_T(\omega_1) = uA_0$, $A_T(\omega_2) = dA_0$ und (8) in die Bedingung $(\overline{ii})$ der Definition 4.1 erhält man außerdem die beiden Ungleichungen

$$0 \;\leq\; \overline{V}_T(\omega_1) \;=\; \bar{y}\,A_0\,\left\{u-(1+\rho)^T\right\} \tag{9}$$

$$\text{und} \quad 0 \;\leq\; \overline{V}_T(\omega_2) \;=\; \bar{y}\,A_0\,\left\{d-(1+\rho)^T\right\} . \tag{10}$$

Des Weiteren folgt aus der Bedingung $(\overline{iii})$ der Definition 4.1, dass mindestens eine der beiden Ungleichungen (9) und (10) mit $<$ anstatt $\leq$ gelten muss. Wir unterscheiden wiederum:

Fall (IIa): $\bar{y} > 0$:
Aus (10) ergibt sich $d \geq (1+\rho)^T$ sowie – wegen der Grundannahme $0 < d < u$ – die Gültigkeit von (9) mit $<$ anstatt $\leq$.

Fall (IIb): $\bar{y} < 0$:
Aus (9) folgt $u \leq (1+\rho)^T$ sowie – wegen der Grundannahme $0 < d < u$ – die Gültigkeit von (10) mit $<$ anstatt $\leq$.

Insgesamt haben wir also aus der Existenz einer ${}_0STR_{\gneqq 0}$*–Strategie* die Gültigkeit der Bedingung $\neg(b)$ verifiziert. □

5 Conclusio

Aufgrund von (mathematisch artikulierten) fundamentalen ökonomischen Betrachtungen ergibt sich folgende wichtige Botschaft (die analogerweise auch für kompliziertere Aktienkurs-Modelle gilt) :

Die stochastische Modellierung des Aktienkurses A_T zum zukünftigen Zeitpunkt T darf nicht beliebig (im Sinne des vorletzten Absatzes der Einleitung) sein! Man braucht (weitere) mathematische Einschränkungen.

Danksagung

Ich möchte mich sowohl bei Herrn Norbert Henze als auch (ungekannterweise) bei den beiden Gutachtern sehr herzlich für die äußerst wertvollen didaktischen Vorschläge und Kommentare im Zusammenhang mit diesem Artikel bedanken.

Literatur

[1] Adelmeyer, M. (2000): Call & Put – Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Zürich: Orell Füssli Verlag.

[2] Bartels, H.-J. (1999): Zur Mathematik der Optionen. Mathematische Semesterberichte 46, 29–45.

[3] Cox, J.C., Ross, S.A. und Rubinstein, M. (1979): Option pricing: a simplified approach. Journal of Financial Economics 7, 229–263.

[4] Eberlein, E. (1998): Grundideen moderner Finanzmathematik. DMV–Mitteilungen 3/98, 10–20.

[5] Irle, A. (1998): Finanzmathematik – Die Bewertung von Derivaten. Stuttgart: Teubner Verlag.

[6] Pfeifer, D. (2000): Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht. Stochastik in der Schule 20(2), 25–37.

[7] Warmuth, E. (2001): Optionen im Mathematikunterricht – eine Mode oder mehr ? In: G. Kaiser, Hrsg.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, 640–643. Hildesheim/Berlin: Verlag Franzbecker.

Anschrift des Verfassers
Wolfgang Stummer
Institut für Mathematische Stochastik
Universität Karlsruhe
Englerstraße 2
D – 76128 Karlsruhe
`stummer@math.uni-karlsruhe.de`