

# Muster in Bernoulli-Ketten

NORBERT HENZE, KARLSRUHE

## Zusammenfassung:

Wir behandeln das Problem der Bestimmung des Erwartungswertes der Wartezeit bis zum Auftreten eines Musters in einer Bernoulli-Kette unter verschiedenen Gesichtspunkten. Von besonderem Interesse für ein begriffliches Verständnis ist die Deutung des Wartens auf ein Muster als faires Spiel mit zufälliger Spieldauer und fester Auszahlung.

## 1 Einführung

Stochastische Probleme im Zusammenhang mit Mustern in Bernoulli-Ketten besitzen zahlreiche Anwendungen, etwa bei der Untersuchung von Genomsequenzen (siehe z.B. [20]). Dabei können selbst sehr einfach gestellte Fragen zu paradox erscheinenden Lösungen führen (siehe etwa [7]; [8], Abschnitt 8.4; [12]; [13]; [14]; [16]; [17]). Betrachtet man etwa die nachstehenden, in zeitlicher Folge zeilenweise erhaltenen Ergebnisse von 300 Münzwürfen<sup>1</sup>, so fällt am Ende der sechsten Zeile eine Häufung von 12 direkt aufeinander folgenden Nullen auf.

```
0111110100101000111011011
1010110010110111110101001
0110010101010100010100100
0111110000100010100100000
0101011101000010010000111
1101110001111000000000000
1100011001010010010000000
0001010100011000100110100
0010010010111001000001001
0000110010100101000110000
1010001010101000011001000
0011110111011111001110100
```

Hier stellt sich allgemeiner das Problem nach der Verteilung der längsten Serie von Erfolgen bzw. von Misserfolgen in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$ , eine Frage, die mit relativ elementaren Mitteln (Formel des Ein- und Ausschließens, siehe [9]) beantwortet werden kann (bzgl. eines Zusammenhangs mit verallgemeinerten Fibonacci-Folgen siehe [19]).

Zwei andere, u.a. in [13] behandelte Fragen betreffen den Erwartungswert der Wartezeit, bis ein bestimmtes Muster, etwa 101, auftritt (in obigem Beispiel wird dieses Muster erstmalig nach dem achten Wurf beobachtet) bzw. das Problem, mit wel-

cher Wahrscheinlichkeit eines von zwei verschiedenen konkurrierenden Mustern früher auftritt als das andere. Wählt man etwa die Muster 1010 und 0100 und beginnt ein Wartespiel „tritt 1010 oder 0100 früher auf?“ (zeilenweise gelesen) sofort nach dem Auftreten eines dieser Muster von neuem, so tritt 1010 in obigem Datensatz 19 mal früher auf als 0100, aber 0100 nur 10 mal früher als 1010.

Humenberger [13] stellt den Satz vom totalen Erwartungswert (zur Berechnung der Erwartungswerte von Wartezeiten für Muster) sowie die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Muster früher auftritt als ein anderes) in den Mittelpunkt seiner Betrachtungen. Die gesuchten Erwartungswerte bzw. Wahrscheinlichkeiten ergeben sich hiermit formal als Lösungen linearer Gleichungssysteme. Am Ende seines Aufsatzes erwähnt Humenberger die sog. Mittelwertsregeln (siehe [4], S. 22f.) als eine alternative Lösungsmethode.

In dieser Arbeit wird der Frage nach dem Erwartungswert der Wartezeit auf ein Muster unter verschiedenen fachlichen und fachdidaktischen Gesichtspunkten nachgegangen. Wir zeigen zunächst, dass die von Engel ([4], S.23) als zweite Mittelwertsregel bezeichnete Formel zur Lösung dieses Problems eine unmittelbare Konsequenz des Satzes vom totalen Erwartungswert ist. In Abschnitt 3 werden für den einfachsten Fall des Wartens auf den ersten Treffer in einer Bernoulli-Kette verschiedene Ansätze zur (begrifflichen) Bestimmung des Erwartungswertes der Wartezeit vorgestellt. Abschnitt 4 diskutiert die Tragfähigkeit der verschiedenen Methoden im Hinblick auf die Bestimmung des Erwartungswertes der Wartezeit für ein allgemeines Muster. Besonderes Augenmerk verdient die Sichtweise des Erwartungswertes als mittlere Länge eines fairen Spiels, bei dem auf das Auftreten eines interessierenden Musters gewettet wird. In Abschnitt 5 wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie die Auftrittswahrscheinlichkeit eines Musters vor einem konkurrierenden Muster ohne Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden kann.

Die Arbeit schließt mit einigen Literaturhinweisen zum Umfeld der behandelten Themen.

<sup>1</sup>vom Autor experimentell erhalten, 1 = Zahl, 0 = Adler

## 2 Totaler Erwartungswert und zweite Mittelwertsregel

Ein Grundprinzip stochastischen Denkens besteht darin, ein kompliziertes Ereignis  $A$  in einfachere Teilereignisse  $A \cap A_1, \dots, A \cap A_n$  zu zerlegen (dabei seien  $A_1, \dots, A_n$  paarweise disjunkte Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit und der Eigenschaft  $\sum_{j=1}^n P(A_j) = 1$ ) und die Wahrscheinlichkeiten dieser Teilereignisse gemäß  $P(A \cap A_j) = P(A_j) \cdot P(A|A_j)$  über *elementare* (d.h. aus der konkreten Situation heraus *direkt angebbare*) bedingte Wahrscheinlichkeiten  $P(A|A_j)$  zu berechnen. Als Resultat ergibt sich die bekannte Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(A|A_j). \quad (1)$$

Ist  $X$  eine Zufallsvariable, welche die möglichen Werte  $x_1, x_2, \dots$  annimmt, so liefert die Anwendung von (1) auf das Ereignis  $A = \{X = x_k\}$  das Resultat

$$P(X = x_k) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(X = x_k|A_j).$$

Setzt man diese Darstellung für  $P(X = x_k)$  in die Definitionsgleichung

$$E[X] = \sum_{k \geq 1} x_k \cdot P(X = x_k) \quad (2)$$

des Erwartungswertes von  $X$  ein und vertauscht die Reihenfolge der Summationen, so folgt mit der allgemeinen Festsetzung

$$E[X|B] := \sum_{k \geq 1} x_k \cdot P(X = x_k|B) \quad (3)$$

( $B \subset \Omega, P(B) > 0$ ) als Analogon zu (1) die in [13] als *Satz vom totalen Erwartungswert* bezeichnete Gleichung

$$E[X] = \sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot E[X|A_j]. \quad (4)$$

Dabei heißt  $E[X|B]$  der *bedingte Erwartungswert von  $X$  unter der Bedingung  $B$*  (genauer: unter der Bedingung, dass das Ereignis  $B$  eintritt). Man beachte, dass

die für die Herleitung von (4) aus (2) vorgenommene Vertauschung der Summationsreihenfolge erlaubt ist, da für den Fall unendlich-vieler Summanden in (2) die absolute Konvergenz der Reihe vorausgesetzt wird.

Die Beziehungen (1) und (4) entfalten ihre Kraft zur Lösung stochastischer Probleme erst dadurch, dass die auf den rechten Seiten von (1) bzw. (4) stehenden Größen nicht über die Definition  $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$  der bedingten Wahrscheinlichkeit bzw. über die Definition (3) berechnet werden müssen, sondern aufgrund einer konkreten Situation als Modellbausteine *strukturell* gegeben sind.

Mannigfache Beispiele hierfür bilden Markowsche Zufallsprozesse in diskreter Zeit auf einem endlichen Zustandsraum  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  (sog. *Markow-Ketten*, vgl.[4], S. 18 f.). Derartige Markow-Ketten können als gerichtete Graphen veranschaulicht werden, wobei die Zustände die Ecken (Knoten) des Graphen bilden. Zu jedem der Zeitpunkte  $1, 2, \dots$  kann der Prozess seinen momentanen Zustand wechseln. Befindet er sich zu einem Zeitpunkt im Zustand  $i$ , so nimmt er mit der (nicht vom Zeitpunkt abhängenden) *Übergangswahrscheinlichkeit*  $p_{ij}$  zum nächsten Zeitpunkt den Zustand  $j$  an. Dabei gelten  $0 \leq p_{ij} \leq 1$  und

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad \text{für jedes } i. \quad (5)$$

Gilt  $p_{ij} > 0$ , so wird eine gerichtete Kante von  $i$  in Richtung  $j$  gezogen. Jeder Zustand  $i$ , der nicht mehr verlassen werden kann (formal:  $p_{ii} = 1$ ), heißt *absorbierend*. Im Fall  $p_{ii} < 1$  heißt  $i$  *innerer Zustand*. Eine Markow-Kette heißt *absorbierend*, falls sie mindestens einen absorbierenden Zustand besitzt und von jedem inneren Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit in einen absorbierenden Zustand gelangen kann. Der stochastische Charakter einer Markow-Kette ist vollständig bestimmt, wenn zusätzlich zu den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Anfangszustand des Prozesses zum Zeitpunkt 1 festgelegt wird.

Abbildung 1 zeigt den Graphen, welcher die Situation des Wartens auf das Muster 110 beim wiederholten Münzwurf beschreibt<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Der Autor dankt Herrn Dr. B. Klar für die Anfertigung der in dieser Arbeit auftretenden gerichteten Graphen

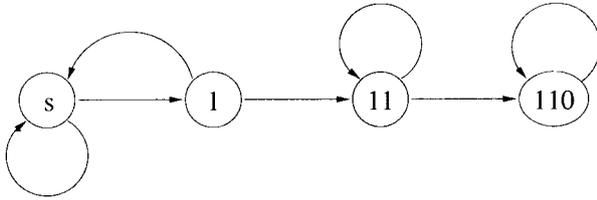


Abb. 1: Markow-Kette „Warten auf 110“

Der Prozess besitzt den „Start“-Zustand  $s$  sowie die weiteren Zustände  $1$ ,  $11$  und  $110$ . Die Übergänge zwischen den Knoten veranschaulichen Aufbau und eventuelle Zerstörung bereits aufgebauter Teile des Musters  $110$  im zeitlichen Verlauf der Serie von Münzwürfen; alle Übergangswahrscheinlichkeiten (ausgenommen jener im absorbierenden Zustand  $110$ ) sind gleich  $1/2$ . Der Prozess befindet sich zu Beginn im Zustand  $s$  sowie immer dann, wenn zuletzt  $0$  geworfen wurde. Die erste Eins nach einer Null führt ihn in den Zustand  $1$  über. Je nachdem, ob danach eine  $1$  oder eine  $0$  auftritt, wechselt der Prozess in den Zustand  $11$  bzw.  $s$ . Eventuell auftretende weitere Einsen ändern am Zustand  $11$  nichts, da die für das Muster  $110$  benötigten beiden Einsen bereits vorliegen. Beim nächsten Auftreten der  $0$  wechselt der Prozess in seinen absorbierenden Zustand  $110$ . Die Zustände  $s$ ,  $1$  und  $11$  sind innere Zustände.

Engel ([4], S. 22 f.) betrachtet den Erwartungswert der zufälligen Wartezeit (Anzahl der Zeitschritte)  $X$  bis zur Absorption einer Markow-Kette, d.h. dem Erreichen eines absorbierenden Zustandes, in Abhängigkeit vom Anfangszustand des Prozesses. Bezeichnen wir diesen Anfangszustand mit  $i$ , so ist dieser Erwartungswert eine Funktion von  $i$ , was im Folgenden durch die Bezeichnung  $E_i[X]$  deutlich gemacht werden soll. Im Fall  $i = s$  schreiben wir kurz  $E[X] := E_s[X]$ . Bezeichnet  $R$  die Menge der absorbierenden Zustände, so gilt zunächst

$$E_i[X] = 0 \quad \text{für jedes } i \in R, \quad (6)$$

da kein Zeitschritt bis zur Absorption erforderlich ist, falls der Prozess bereits in einem absorbierenden Zustand startet. Ist  $i$  ein innerer Zustand, so liefert die Formel (4) vom totalen Erwartungswert, angewendet auf die einander paarweise ausschließenden Ereignisse  $A_{ij} = \{\text{Prozess wechselt von } i \text{ in den Zustand } j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , das Resultat

$$E_i[X] = \sum_{j=1}^n P(A_{ij}) \cdot E_j[X]. \quad (7)$$

Da der Prozess „kein Gedächtnis besitzt“, sondern sich nach dem Übergang von  $i$  nach  $j$  stochastisch so verhält, als wäre er im Zustand  $j$  gestartet worden, und da der Zustandswechsel von  $i$  nach  $j$  einen Zeitschritt verbraucht, gilt

$$E_i[X|A_{ij}] = 1 + E_j[X].$$

Setzt man diese Darstellung in (7) ein, so folgt unter Beachtung von  $P(A_{ij}) = p_{ij}$  sowie Beziehung (5) die in ([4], S. 23) als *zweite Mittelwertsregel* bezeichnete Gleichung

$$E_i[X] = 1 + \sum_{j=1}^n p_{ij} E_j[X], \quad i \in S \setminus R. \quad (8)$$

Die zweite Mittelwertsregel ist somit eine direkte Folgerung aus der Formel vom totalen Erwartungswert.

Zur Illustration betrachten wir das Problem der Bestimmung des Erwartungswertes der Wartezeit  $X$  bis zum Auftreten des Musters  $110$  beim wiederholten Münzwurf, vgl. den in Abbildung 1 veranschaulichten Prozess mit den Zuständen  $s$ ,  $1$ ,  $11$  und  $110$ . Aufgrund der Struktur der möglichen Übergänge des Graphen in Abbildung 1 und Gleichung (8) gilt (mit der Festsetzung  $E[X] := E_s[X]$ )

$$E[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E[X] + \frac{1}{2} \cdot E_1[X]$$

$$E_1[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E[X] + \frac{1}{2} \cdot E_{11}[X]$$

$$E_{11}[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E_{11}[X] + \frac{1}{2} \cdot E_{110}[X].$$

Wegen  $E_{110}[X] = 0$  (vgl. (6)) lassen sich obige Gleichungen leicht nach  $E[X]$  auflösen; es ergibt sich  $E[X] = 8$ .

Es ist lehrreich, diese Herleitung von  $E[X]$  mit der in ([13], S.10) verwendeten Methode zu vergleichen. Dort werden zunächst alle denkbaren Münzwurfsereien nach den vier Möglichkeiten  $00$ ,  $01$ ,  $10$  und  $11$  für die *beiden ersten Würfe* zerlegt. Bezeichnet man diese einander ausschließenden Ereignisse der Reihe nach mit  $B_1, B_2, B_3$  und  $B_4$ , so liefert die Formel (4) vom totalen Erwartungswert das Ergebnis

$$E[X] = \sum_{j=1}^4 P(B_j) \cdot E[X|B_j].$$

Zur Bestimmung von  $E[X|B_j]$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) wird dann (implizit) wie in [4] vorgegangen und eine Markow-Kette mit den Zuständen 00, 01, 10, 11 und 110 (vgl. Abbildung 2) betrachtet.

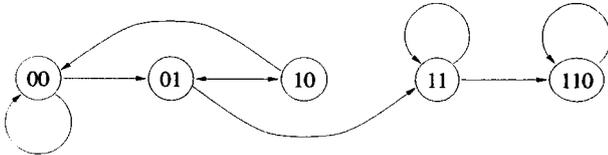


Abb. 2: „Warten auf 110“ (nach Zerlegung nach den beiden ersten Würfeln)

Die Grundidee besteht darin, dass im Hinblick auf eine Absorption im Zustand 110 nur die Ergebnisse der jeweils letzten beiden Münzwürfe relevant sind. Da durch die beiden ersten Würfe zwei Zeitschritte verbraucht wurden, gelten mit der oben verwendeten Schreibweise die Gleichungen  $E[X|B_1] = 2 + E_{00}[X]$ ,  $E[X|B_2] = 2 + E_{01}[X]$ ,  $E[X|B_3] = 2 + E_{10}[X]$  und  $E[X|B_4] = 2 + E_{11}[X]$ . Im Unterschied zu [13] interpretieren wir dabei  $E_{00}[X]$  als Anzahl der Zeitschritte bis zur Absorption, wenn der in Abbildung 2 veranschaulichte Prozess im Zustand 00 startet, zählen also die beiden Münzwürfe, welche das Resultat 00 ergaben, nicht mit. Die zweite Mittelwertsregel liefert nun

$$E_{00}[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E_{00}[X] + \frac{1}{2} \cdot E_{01}[X]$$

$$E_{01}[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E_{10}[X] + \frac{1}{2} \cdot E_{11}[X]$$

$$E_{10}[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E_{00}[X] + \frac{1}{2} \cdot E_{01}[X]$$

$$E_{11}[X] = 1 + \frac{1}{2} \cdot E_{110}[X] + \frac{1}{2} \cdot E_{11}[X]$$

sowie  $E_{110}[X] = 0$  (vgl. (6)). Hieraus folgt  $E_{11}[X] = 2$ ,  $E_{10}[X] = 8$ ,  $E_{01}[X] = 6$ ,  $E_{00}[X] = 8$  und somit nach einiger Rechnung ebenfalls das schon bekannte Resultat  $E[X] = 8$ .

Im Vergleich zu dieser Methode führt die in [4] favorisierte Vorgehensweise zur Bestimmung von  $E[W_{110}]$  schneller zum Ziel, weil sie die *wirklich wesentlichen* Aspekte des dynamischen Prozesses der

Entstehung und eventueller Zerstörung eines interessierenden Musters herausarbeitet und die aus dem Satz vom totalen Erwartungswert folgende Mittelwertsregel nur auf einer Stufe verwendet. Zu diesem letzten Punkt beachte man, dass der aus drei Zuständen bestehende linke Teil des Graphen in Abbildung 2 auf die in Abbildung 1 mit  $s$  und  $l$  bezeichneten Zustände komprimiert werden kann.

### 3 Warten auf den ersten Treffer

In diesem Abschnitt betrachten wir die üblicherweise mit dem Begriff *Bernoulli-Kette* umschriebene wiederholte Durchführung eines Experimentes mit den möglichen Ausgängen 1 („Treffer“) und 0 („Niete“) unter gleichartigen unabhängigen Bedingungen. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer sei mit  $p$  bezeichnet. Wir setzen  $0 < p < 1$  voraus und schreiben kurz  $q := 1 - p$ . Die interessierende Zufallsvariable sei die mit  $W_1$  bezeichnete *Wartezeit bis zum ersten Treffer*, also die Anzahl der Versuche (einschließlich des letzten), bis der erste Treffer auftritt. Wir nähern uns dem Problem der Bestimmung des Erwartungswertes von  $W_1$  auf verschiedene Weisen, und zwar

1. über die Verteilung von  $W_1$ ,
2. über den totalen Erwartungswert (Mittelwertsregel),
3. über das Gesetz der großen Zahlen,
4. über ein faires Spiel.

Diese Herangehensweisen liefern unterschiedliche Einsichten in die Struktur des Problems. Wie in Abschnitt 4 ausgeführt wird, besteht der Vorteil des in d) beschriebenen Ansatzes darin, dass der Erwartungswert der Wartezeit auf ein beliebiges Muster schnell ohne das Lösen linearer Gleichungssysteme bestimmt werden kann.

Zu a): Da das Ereignis  $\{W_1 = k\}$  genau dann eintritt, wenn der erste Treffer auf  $k - 1$  Nieten folgt, ergibt sich die (geometrische) Verteilung von  $W_1$  nach der ersten Pfadregel zu

$$P(W_1 = k) = q^{k-1} \cdot p, \quad k \geq 1.$$

Hieraus folgt nach Definition des Erwartungswertes

$$E[W_1] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = \frac{1}{p}.$$

Die Berechnung des Grenzwertes der auftretenden unendlichen Reihe geschieht dabei am einfachsten über die Beziehung

$$\begin{aligned}
E[W_1] &= p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots \\
&= 1 - q + 2q(1 - q) + 3q^2(1 - q) \\
&\quad + 4q^3(1 - q) + \dots \\
&= 1 - q + 2q - 2q^2 + 3q^2 - 3q^3 \\
&\quad + 4q^3 - 4q^4 + \dots \\
&= 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \\
&= \frac{1}{1 - q} \\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Zu b): Abbildung 3 veranschaulicht das Warten auf den ersten Treffer mit Hilfe eines gerichteten Graphen, an dessen Kanten die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p$  bzw.  $q$  angebracht sind.

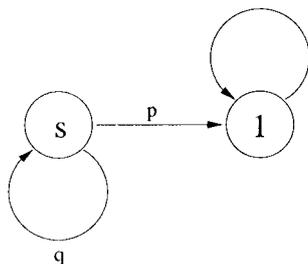


Abb. 3: Markov-Kette „Warten auf 1“

Aus der Mittelwertsregel (8) folgt mit der Festsetzung  $E[W_1] = E_s[W_1]$

$$E[W_1] = 1 + p \cdot E_1[W_1] + q \cdot E[W_1].$$

Wegen  $E_1[W_1] = 0$  (vgl. (6)) ergibt sich unmittelbar  $E[W_1] = 1/p$ .

Zu c): Dieser heuristische Ansatz betrachtet den Erwartungswert von  $W_1$  als „Mittelwert auf lange Sicht“ und geht vom Gesetz Großer Zahlen aus (siehe z.B. [11], Kapitel 26). Bezeichnet  $T_n$  die zufällige Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$ , so besagt das Gesetz Großer Zahlen, dass die relative Trefferhäufigkeit  $T_n/n$  beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  stochastisch gegen die Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  konvergiert. Da sich stochastische Konvergenz ebenso wie die Konvergenz von Zahlenfolgen bei der Transformation mit einer stetigen Funktion „vererbt“, konvergiert der Kehrwert  $n/T_n$  beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  stochastisch gegen  $1/p$ . Der Quotient  $n/T_n$  teilt die Anzahl aller Versuche durch die Anzahl der erzielten Treffer, nähert sich also bei

wachsendem  $n$  immer besser der *pro Treffer durchschnittlich benötigten Versuchsanzahl* an (man beachte, dass am Ende der Versuchsreihe Nieten auftreten können). Folglich muss sich die auf lange Sicht beobachtete durchschnittliche Wartezeit auf einen Treffer dem Wert  $1/p$  annähern. Diese Sichtweise ist in Abbildung 4 veranschaulicht.

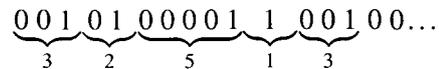


Abb. 4:  $n/T_n$  als Näherung für die durchschnittliche Wartezeit pro Treffer

Zu d): Diese zumindest auf Schulniveau ebenfalls heuristische Überlegung betrachtet das Warten auf den ersten Treffer als ein Glücksspiel zwischen Spielern und einer Bank. Das Spiel besteht darin, die Versuche mit den möglichen Ergebnissen (Treffer oder Niete) einer Bernoulli-Kette im zeitlichen Verlauf zu beobachten, wobei vor jedem Versuch ein Spieler einen Einsatz in Höhe von 1 DM auf das Auftreten eines Treffers tätigt. Im Erfolgsfall (Treffer) erhält der Spieler  $1/p$  DM, und das Spiel ist beendet. Andernfalls geht er leer aus, und ein neuer Spieler setzt auf „Treffer“.

Das Spiel ist fair, da die erwartete Auszahlung in DM für jeden Spieler gleich  $p \cdot 1/p = 1$  ist. Wird etwa 0001 beobachtet, so gehen die ersten drei Spieler leer aus, und der vierte Spieler erhält  $1/p$  DM. Die Bank muss bei diesem Spiel (unabhängig von dessen in der Anzahl der Versuche gemessenen Dauer!) den festen Betrag von  $1/p$  DM auszahlen. Die Einnahmen der Bank sind zufällig; sie betragen  $W_1$  DM, weil der erste Treffer im (zufälligen)  $W_1$ -ten Versuch auftritt. Da das Spiel fair ist, müssen sich auf die Dauer Einnahmen und Ausgaben ausgleichen, weshalb der Erwartungswert von  $W_1$  gleich  $1/p$  sein muss.

Dieser Gedankengang führt mit Hilfe des Martingalbegriffs zu einem mathematischen Beweis der Gleichung  $E[W_1] = 1/p$  (siehe Li [16]). Wie im nächsten Abschnitt ausgeführt wird, besitzt er gegenüber anderen Methoden den Vorteil einer unmittelbaren begrifflichen Verallgemeinerung für das Problem, den Erwartungswert der Wartezeit auf ein komplizierteres Muster zu bestimmen.

#### 4 Warten auf ein allgemeines Muster

Es sei  $a = a_1 a_2 \dots a_n$  ein vorgegebenes Muster der Länge  $n$  aus Einsen und Nullen; die Wartezeit (Anzahl der Versuche), bis  $a$  erstmalig auftritt, sei mit  $W_a$  bezeichnet. Im Folgenden sollen die in Abschnitt 3



Würfeln. Tritt 1 beim nächsten Wurf nicht auf, so hat der Spieler seinen Einsatz verloren, und das Spiel ist für ihn beendet. Andernfalls erhält er 2 DM, muss aber diesen Einsatz im folgenden Versuch auf das nächste Symbol des interessierenden Musters, also auf 0, setzen. Auch hier gilt, dass der Spieler entweder verliert oder 4 DM erhält. Im letzteren Fall muss er diesen Betrag im nächsten Versuch auf das dritte Symbol des Musters, also 1, setzen. Im Gewinnfall erhält er DM 8 und setzt diese auf das Auftreten des letzten Symbols, also auf 0. Tritt 0 auf, so erhält der Spieler 16 DM, und das Spiel ist für ihn sowie für alle eventuell noch im Rennen befindlichen Spieler beendet. Da vor jedem Versuch ein neuer Spieler hinzukommt, hat der vor dem vorletzten Versuch eingestiegene Spieler noch mit Erfolg auf den Anfang 10 des Musters gesetzt; er erhält somit 4 DM, und alle anderen Spieler verlieren ihren Einsatz.

Das Spiel ist für alle Beteiligten in dem Sinne fair, als der Erwartungswert ihrer Rückzahlung (durch die Bank) gleich ihrem Einsatz, also 1 DM ist. Die Bank muss unabhängig von der zufälligen Dauer  $W_{1010}$  des Spiels den festen Betrag von 20 DM auszahlen. Da das Spiel fair ist, müssen sich bei oftmaliger Wiederholung auf die Dauer (zufällige) Einnahmen und feste Ausgaben (von DM 20 pro Spiel) ausgleichen, weshalb  $E[W_{1010}] = 20$  gelten muss. Mit der gleichen Überlegung ergibt sich  $E[W_{1111}] = 30$  ( $= 16 + 8 + 4 + 2$ ) und  $E[W_{110}] = 8$  wie früher. Ein Ausdruck für den Erwartungswert der Wartezeit auf ein allgemeines Muster  $a = a_1 a_2 \dots a_n$  ist (siehe [16])

$$E(W_a) = 2^n + \sum_{j=1}^{n-1} 2^j \cdot \prod_{i=1}^j \mathbf{1}\{a_{i+n-j} = a_i\}. \quad (9)$$

Man beachte, dass das in (9) auftretende Produkt genau dann gleich 1 ist, wenn das aus den letzten  $j$  Symbolen bestehende Teilmuster von  $a$  mit dem aus den ersten  $j$  Symbolen gebildeten Teilmuster von  $a$  übereinstimmt.

Wartet man in einer Bernoulli-Kette mit der allgemeinen Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  auf das Muster 1010, so ist das Spiel fair, wenn der Sieger den Gewinn in Höhe von  $1/(p^2 q^2)$  DM erhält und dem vor dem vorletzten Versuch einsteigenden Spieler noch  $1/(pq)$  DM ausbezahlt werden. Mit den gleichen Überlegungen wie oben muss somit  $E[W_{1010}] = 1/(p^2 q^2) + 1/(pq)$  gelten. Analog erhält man etwa  $E[W_{110011}] = 1/(p^4 q^2) + 1/p^2 + 1/p$ , denn sowohl der vorletzte Spieler als auch der letzte Spieler beob-

achten noch einen Anfang des Musters 110011 (siehe hierzu auch [5], S. 328).

## 5 Konkurrierende Muster

Setzen zwei Spieler auf verschiedene Muster der Länge 3, wobei derjenige Spieler gewinnt, dessen Muster zuerst auftritt, so existiert in dieser Spielsituation überraschenderweise kein bestes Muster, sondern es gibt vielmehr zu jedem Muster  $a$  ein Muster  $b$  mit der Eigenschaft  $P(W_b < W_a) \geq 2/3$  (siehe [7], [8], [12], [13], [18]). Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Musters  $b$  vor dem Muster  $a$ , also für das Ereignis  $W_b < W_a$ , kann mit Hilfe der aus der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgenden sog. *ersten Mittelwertsregel* (vgl. [4]) formal über die Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Zusätzliche Einsicht liefert die Veranschaulichung der Situation konkurrierender Muster mit Hilfe eines gerichteten Graphen (siehe auch [4]), welcher für den Fall  $a = 110$  und  $b = 100$  in Abbildung 6 als Markow-Kette mit den absorbierenden Zuständen 110 und 100 dargestellt ist.

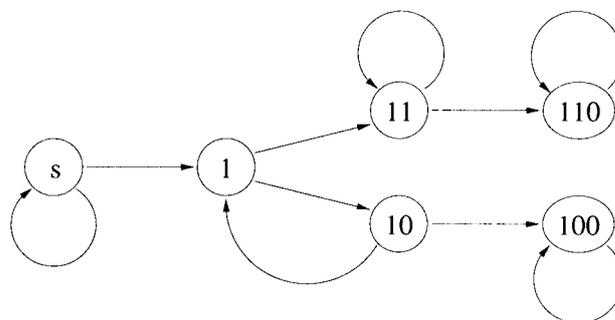


Abb. 6: Markow-Kette „Warten auf 110 oder 100“

Die Wahrscheinlichkeit, dass – vom Startzustand  $s$  ausgehend – eine Absorption in 110 stattfindet, dass also das Muster 110 früher auftritt als 100, kann ohne Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Hierzu bedienen wir uns der Sprechweise, dass zwischen den Zuständen einer Markow-Kette Wahrscheinlichkeit in Richtung der Kanten „fließt“; dabei spaltet sich die in einem Zustand (Knoten)  $i$  befindliche Wahrscheinlichkeit gemäß der Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}, j = 1, \dots, n$ , auf. Für die in Abbildung 6 dargestellte Markow-Kette fließt die Gesamtwahrscheinlichkeit Eins vom Startzustand  $s$  (im Augenblick des Auftretens der ersten 1) vollständig zum Zustand 1. Dort teilt sie sich nach dem nächsten Versuch gleichmäßig auf die Zustände 11 und 10 auf. Die in 11 ankommende Wahrscheinlichkeit  $1/2$  fließt vollständig (beim Auftreten der ersten 0 nach 11) in den absorbierenden Zustand 110.

Die im Zustand 10 befindliche Wahrscheinlichkeit  $1/2$  fließt nach dem nächsten Versuch jeweils zur Hälfte in den absorbierenden Zustand 100 und in den Zustand 1, so dass jetzt die Zustände 1, 110 und 100 in dieser Reihenfolge die Wahrscheinlichkeiten  $1/4$ ,  $1/2$  und  $1/4$  besitzen. Von der ursprünglich im Zustand 1 befindlichen Wahrscheinlichkeit Eins ist ein Viertel in den Zustand 1 „zurückgeflossen“; der Rest ist im Verhältnis 2 zu 1 in die absorbierenden Zustände 110 und 100 gewandert.

Mit den gleichen Überlegungen teilt sich die jetzt im Zustand 1 befindliche Wahrscheinlichkeit  $1/4$  *letztlich*, d.h. nach hinreichend langer Beobachtung der Bernoulli-Kette, im Verhältnis 1 zu 2 zu 1 auf die Zustände 1, 110 und 100 auf, so dass insbesondere die Wahrscheinlichkeit  $1/16 = (1/4)^2$  in den Zustand 1 zurückfließt. Nach der  $n$ -ten Aufteilung dieser Art befindet sich die Wahrscheinlichkeit  $(1/4)^n$  im Zustand 1; der Rest hat sich im Verhältnis 2 zu 1 auf die Zustände 110 und 100 aufgeteilt. Im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  befindet sich die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse im Verhältnis 2 zu 1 in den absorbierenden Zuständen 110 und 100. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption in 110, also dem Eintreten des Ereignisses  $W_{110} < W_{100}$ , gleich  $2/3$ .

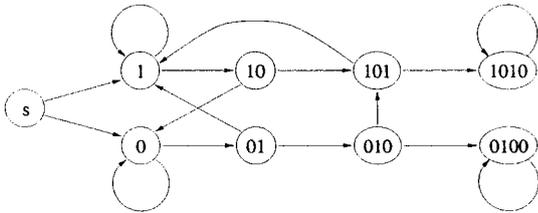


Abb. 7: Markow-Kette „Warten auf 1010 oder 0100“

Wir wollen abschließend ein Phänomen beleuchten, welches erst bei der Betrachtung von Mustern der (Mindest-) Länge 4 auftritt (siehe auch [13]). Die in Abschnitt 3 vorgestellte Methode von Li liefert, dass die Muster 1010 und 0100 die mittleren Wartezeiten (Erwartungswerte) 20 bzw. 18 besitzen; „im Mittel“ wartet man also länger auf das Muster 1010 als auf 0100. Wie in [13] mit Hilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (Lösen eines linearen Gleichungssystems) gezeigt wird, tritt jedoch überraschenderweise das Muster 1010 mit der Wahrscheinlichkeit  $9/14$  früher auf als 0100. Zur Förderung des begrifflichen Verständnisses, warum das Muster 1010 in der Konkurrenz mit 0100 qualitativ im Vorteil ist, empfiehlt sich ein genaues Studium des in Abbildung 7 dargestellten Graphen des Wartespiels „Tritt zuerst 1010 oder 0100 auf?“ Bei näherer Betrachtung wird klar, dass das Muster 1010 gegenüber

0100 favorisiert ist, weil der Zustand 010 in den Zustand 101 übergehen kann (was die Wahrscheinlichkeit für eine Absorption im Zustand 1010 erhöht), wohingegen derjenige Spieler, der auf 1010 setzt, vom Zustand 101 ausgehend nur in den Zustand 1 „zurückgeworfen werden kann“. Die Absorptionswahrscheinlichkeit von  $9/14$  im Zustand 1010 kann ohne Lösen eines linearen Gleichungssystems analog zu oben wie folgt eingesehen werden: Befindet sich die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  im Zustand 0, so teilt sich diese letztlich im Verhältnis 5 zu 1 zu 2 auf die Zustände 1 bzw. 1010 bzw. 0100 auf. Hierzu beachte man, dass jeder von 0 abfließende Anteil von  $\alpha$  zur Hälfte über 01 nach 1 wandert und die andere Hälfte im Zustand 010 auf den absorbierenden Zustand 0100 und den Zustand 101 aufgeteilt wird. Ein Viertel dieses Anteils wandert also nach 0100; das andere, in 101 befindliche Viertel spaltet sich zu gleichen Teilen auf die Zustände 1 und 1010 auf. Letztlich sind also  $5/8$  des von 0 abfließenden Anteils nach 1 gewandert; die übrigen  $3/8$  teilen sich im Verhältnis 1 zu 2 auf die absorbierenden Zustände 1010 und 0100 auf.

Befindet sich andererseits die Wahrscheinlichkeit  $\beta$  im Zustand 1, so teilt sich diese *letztlich* im Verhältnis 5 zu 2 auf die Zustände 1010 bzw. 0100 auf. Eine Begründung hierfür kann analog zu oben gegeben werden: Jede aus 1 abfließende Wahrscheinlichkeit kommt nach Aufspaltung in 10 zur Hälfte in 101 an; die andere Hälfte wandert über 0 *letztlich* vollständig nach 01. Nach Aufspaltung in 101 befindet sich ein Viertel im absorbierenden Zustand 1010, das andere Viertel ist nach 1 zurückgeflossen. Die in 01 befindliche Hälfte fließt zur Hälfte in den Zustand 1, die andere Hälfte spaltet sich in 010 zu gleichen Teilen auf 0100 und 101 auf. In 101 findet eine weitere gleichmäßige Aufspaltung auf die Zustände 1010 und 1 statt. Insgesamt sind  $9/16$  der aus 1 abfließenden Wahrscheinlichkeit nach 1 zurückgeflossen; die absorbierenden Zustände 1010 und 0100 erhalten die Anteile  $5/16$  bzw.  $2/16$ . Da die Teilungsverhältnisse bei allen folgenden Aufteilungen der jeweils vom Zustand 1 abfließenden, geometrisch abnehmenden Wahrscheinlichkeiten gleich bleiben, teilt sich die vom Zustand 1 ausgehende Wahrscheinlichkeit letztlich im Verhältnis 5 zu 2 auf die absorbierenden Zustände 1010 und 0100 auf.

Da sich der von 0 nach 1 fließende Anteil von  $5/8$  – wie oben gesehen – im Verhältnis 5 zu 2 auf die Zustände 1010 bzw. 0100 aufteilt, erhält der absorbierende Zustand 1010 schließlich den Anteil  $1/8 +$

$5/8 \cdot 5/7 = 32/56$  der aus dem Zustand 0 fließenden Wahrscheinlichkeit. Zu Beginn findet eine Aufteilung der im Zustand  $s$  befindlichen Wahrscheinlichkeit Eins zu gleichen Teilen auf die Zustände 1 und 0 statt; es gilt also  $\alpha = \beta = 1/2$ . Folglich erhält der absorbierende Zustand 1010 schließlich die Wahrscheinlichkeit  $32/56 \cdot 1/2 + 5/7 \cdot 1/2 = 9/14$ .

## 6 Abschließende Bemerkungen

Wir möchten abschließend noch einige Literaturhinweise zum Umfeld der behandelten Themen geben: Colwell und Gillett [2] verwenden die Mittelwertsregel zur Bestimmung des Erwartungswertes

$$\frac{(1-p^m)(1-q^n)}{pq(1-(1-p^{m-1})(1-q^{n-1}))}$$

der mit  $W_{m,n}$  bezeichneten Anzahl der Versuche bis zum Erreichen von  $m$  direkt aufeinander folgenden Treffern oder  $n$  direkt aufeinander folgenden Nieten in einer Bernoulli-Kette. Forfar und Keogh [6] bestimmen Erwartungswert und Varianz von  $W_{m,m}$  im Fall  $p = 1/2$  mit Hilfe einer Rekursionsformel vom Fibonacci-Typ. Boyd [1] verallgemeinert die Ergebnisse von Forfar und Keogh, indem er die erzeugende Funktion von  $W_{m,m}$  herleitet. Ilbertz [15] geht von der Situation aus, dass  $k$  Treffer und  $l$  Nieten in einer rein zufälligen Anordnung vorliegen und bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $j$  zusammenhängende Trefferserien auftreten. In der gleichen Situation leiten Cramer und Nasri-Roudsari [3] mit Hilfe der Formel des Ein- und Ausschließens die Verteilung der längsten Serie direkt aufeinander folgender Treffer her.

## Literatur

- [1] Boyd, A.V. (1987): Waiting time for a run of wins. *Math. Spectrum* 19, 76–80.
- [2] Colwell, D.J. und Gillett, J.R. (1984): Runs in Bernoulli trials. *Math. Gaz.* 68, 196–199.
- [3] Cramer, E., Nasri-Roudsari, D. (1995): Die Siebformel von Poicaré-Sylvester und 'Runs'. Eine Anwendung in der Informatik. *Stochastik in der Schule* 15, 13–22.
- [4] Engel, A. (1976): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Band 2. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
- [5] Feller, W. (1968): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. Wiley, New York.
- [6] Forfar, D.O. und Keogh, T.W. (1985): Independence and the length of a run of wins. *Math. Spectrum* 18, 70–75.
- [7] Gardner, M. (1974): *Mathematical games*. *Scientific American* 231, 120–124.
- [8] Graham, R.L., Knuth, D.E. und Patashnik, O. (1989): *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley.
- [9] Henze, N. (1998): Stochastische Extremwertprobleme oder Wie banal ist die Sensation? *Mitt. Math. Ges. Hamburg* 17, 51–74.
- [10] Henze, N. (2000): Stochastische Modellbildung zwischen Glücksspiel-Mathematik und wirklichem (?) Anwendungsbezug – eine kritische Bestandsaufnahme. In: *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht* (H. Hischer, Hrsg.), Verlag Franzbecker, Hildesheim.
- [11] Henze, N. (2000): *Stochastik für Einsteiger*. 3. Auflage. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden.
- [12] Hombas, V.C. (1997): Waiting time and expected waiting time – paradoxical situations. *Amer. Statist.* 51, 130–133.
- [13] Humenberger, H. (2000): Überraschendes bei Münzwurfserien. *Stochastik in der Schule* 20, 4–17.
- [14] Humenberger, H. (2000): Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Zahlen *Stochastik in der Schule* 20, 15–22.
- [15] Ilbertz, B. (1995): Junge/Mädchen-Runs. *Mathematik lehren* 70, 54–55.
- [16] Li, S.-Y. R. (1980). A martingale approach to the study of occurrence of sequence patterns in repeated experiments. *Ann. Prob.* 8, 1171–1176.
- [17] Penney, W. (1969): Problem: Penney-ante. *J. Recreational Mathematics* 2, 241.
- [18] Székely, G.J. (1986): *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht.
- [19] Tomkins, A. und Pitt, D. (1985): Runs and the generalized Fibonacci sequence. *Math. Gaz.* 69, 109–113.
- [20] Waterman, M.S. (1995): *Introduction to computational biology*. Chapman & Hall, London.

Anschrift des Verfassers  
 Prof. Dr. Norbert Henze  
 Universität Karlsruhe  
 Institut für Mathematische Stochastik  
 Englerstr. 2  
 76128 Karlsruhe  
 Norbert.Henze@math.uni-karlsruhe.de