

in USA und er leidet an Tuberkulose. Unglücklicherweise hat er sich in Nevada niedergelassen, also in jenem Bundesstaat, dessen Klima offensichtlich die nachteiligsten Folgen für Tuberkulosekranke hat. Ich konnte ihn sofort davon überzeugen, daß ein Umzug nach Florida mit seinem so viel günstigeren Klima die Heilungschancen vervielfachen würde. Ich werde deshalb in die USA reisen und meinem Bruder bei der Wohnungssuche und dem Umzug nach Florida behilflich sein. Wann ich meine Arbeit an der Dissertation fortsetzen kann, ist deshalb heute noch nicht absehbar.

Mit freundlichen Grüßen
Ihr O. Berflächler

Prof. Dr. Felix Rauenfreund
An Herrn
stud. med. vet. Oskar Berflächler

E I L B R I E F

Lieber Herr Berflächler,

die Sorge um das Wohlergehen Ihres Bruders teile ich mit Ihnen, wenn auch aus anderen Gründen als Sie. Die Sterberaten bei an Tuberkulose Erkrankten sind in den einzelnen Bundesstaaten so extrem unterschiedlich, daß mir sofort ein schlimmer Verdacht kam, den ich allerdings mangels ausreichender Detailkenntnisse nicht ohne Rückfrage bei einem Kollegen aus der Humanmedizin

belegen konnte. Dieser ist Spezialist für Lungenkrankheiten und kennt überdies die Situation in den Vereinigten Staaten aus eigener Anschauung. Das für Tbc-Kranke günstigste Klima hat nicht Florida, sondern der Wüstenstaat Nevada mit seinem trockenen Klima, weshalb der größte Teil der amerikanischen Tbc-Kranken nach Nevada umzieht. Dort ist die Heilungsquote circa achtmal so hoch wie in den anderen Staaten, und die vergleichsweise hohe Todesfallrate geht auf eine ca. 30mal höhere Konzentration an Kranken zurück. Florida dagegen gilt wegen des feuchtwarmen Klimas geradezu als Todesfalle für an Tuberkulose Erkrankte. Die Ärzte sehen sich deshalb gezwungen, schon bei bloßem Verdacht auf Tbc den Kranken umgehend zum Umzug nach Nevada zu raten. Und deshalb kommt es in Florida nur dann zu Todesfällen, wenn die Vorsorgeuntersuchungen gesetzwidrig vernachlässigt worden sind, also in ganz seltenen Ausnahmefällen. Ich muß Ihnen heute raten, nie wieder aus Statistiken, Versuchsreihen, Meßdaten, Beobachtungen, Durchschnittswerten, Verteilungen oder Ähnlichem je einen Schluß zu ziehen. Ihrem Bruder aber wünsche ich baldige Genesung – in Nevada.

Alles Gute und viele Grüße
Ihr Felix Rauenfreund

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Armin Saam
Nelkenweg 4
56220 Kettig

Distanz auch zu sich selbst?

Weiteres zu den Nennern n versus $n - 1$ bei der Varianz

RAPHAEL DIEPGEN, BOCHUM

Zusammenfassung: *Wenn man die Varianz „mittelwertfrei“ über die quadratischen Abweichungen der Messwerte voneinander einführt, stellt sich die Frage, ob man dabei die Abweichungen jeweils der Messwerte von sich selbst - a priori alle ohnehin gleich null - berücksichtigen sollte oder nicht. Einige didaktische Aspekte dieser Frage werden diskutiert.*

1. Das Problem

Ich hatte jüngst den Vorschlag gemacht, im Unter-

richt über Beschreibende Statistik mit einfachen nichtprobabilistischen Repräsentativitätsüberlegungen den Nenner $n-1$ für den erwartungstreuen Varianzschätzer plausibel zu machen (Diepgen 1999). Hintergrund war das Anliegen, in dem nichtprobabilistischen Unterricht über Deskriptive Statistik, wie er etwa im neuen nordrhein-westfälischen Gymnasiallehrplan für die Klasse 11 vorgesehen ist, die dort dennoch geforderten Bezüge zu eigentlich probabilistischen Konzepten des späteren Stochastikunterrichts herzustellen. Der Vorschlag ging

„selbstverständlich“ davon aus, dass der Unterricht auf die „übliche“ Varianz mit dem Nenner n ausgerichtet ist, also auf die mittlere quadratische Abweichung der Messwerte vom Mittelwert. Denn dieses elementare Konzept ist nicht nur auf deskriptivstatistischer Stichprobenebene naheliegend, sondern auch auf probabilistischer Populations-ebene weiterführend: Dort erscheint die Varianz schließlich als Erwartungswert der quadratischen Abweichungen vom Erwartungswert (der ursprünglichen Zufallsgröße). Die Varianz mit Nenner $n-1$ war in meinem Vorschlag demgegenüber lediglich eine verblüffende und zunächst gänzlich unplausible „Besonderheit“, die verstehen zu wollen gerade den Unterricht motivieren sollte. Dieses Verstehen setzt in meinem Vorschlag voraus, dass die übliche Varianz mit Nenner n (re-)konstruiert wird als die Hälfte der mittleren quadratischen Abweichung der Messwerte voneinander. Also als die Hälfte des Mittelwerts der n^2 quadratischen Differenzen eines jeden Messwertes von jedem Messwert. (Oder - was dasselbe ist - schlicht als Mittelwert der $n(n+1)/2$ nichtredundanten, also nur „einmal gezählten“ quadratischen Differenzen der Messwerte voneinander.) Definiert man die übliche Varianz mit Nenner n in diesem Sinne, so eröffnet sich sofort der Blick darauf, dass bei dieser Varianz mit Nenner n in der kleinen Stichprobe der Anteil der a-priori-Null-differenzen zwischen einem Messwert jeweils und sich selbst gegenüber der unendlich großen Grundgesamtheit - mit $1/n$ gegenüber 0 - überrepräsentiert ist. Und dass die daraus resultierende systematische Überschätzung der Populationsvarianz durch die Stichprobenvarianz gerade dadurch korrigiert werden kann, dass man der letzteren Nenner um 1 verringert. So weit, so gut. Warum aber, so werden manche Schüler bei diesem Unterricht schon gleich am Anfang einwenden, soll man bei Betrachtung der Differenzen der Messwerte voneinander die nichtinformativen a-priori-Null-differenzen der Messwerte jeweils von sich selbst überhaupt mitzählen?

2. Ein Dilemma?

Dieser Schülereinwand ist kaum zwingend von der Hand zu weisen. Zählt man aber diesem Einwand folgend die a-priori-Null-differenzen von Anfang an nicht mit, so landet man sofort bei der Varianz mit Nenner $n-1$: Diese Varianz erscheint dann als das einzig „Natürliche“ und verliert gänzlich ihre Besonderheit. Didaktischer Nachteil: Diese Varianz ist ihres Nenners $n-1$ wegen für den Schüler nicht mehr sofort als mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert interpretierbar. Auf diese Interpretation aber sollte der Unterricht wohl kaum ver-

zichten. Und erst nach dieser Interpretation stellt sich ja das Problem, wie die Varianz in diesem Sinne erwartungstreu zu schätzen ist. Hier scheint sich ein kleines didaktisches Dilemma aufzutun:

- Beginnt man den Unterricht zur Streuung mit den quadratischen Abweichungen der Messwerte voneinander unter Einschluss der a-priori-Null-differenzen, so landet man recht elegant bei der Varianz mit Nenner n im üblichen Sinne der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert und kann dann ebenso elegant das Problem der erwartungstreuen Schätzung dieser Varianz behandeln, nämlich durch Aufweis der Überrepräsentanz der a-priori-Null-differenzen in der Stichprobe im Vergleich zur Grundgesamtheit. Aber man übergeht dabei am Anfang - dafür gibt's natürlich hinreichend rhetorische Tricks - einen naheliegenden Schülereinwand.
- Beginnt man den Unterricht demgegenüber mit den quadratischen Abweichungen der Messwerte voneinander unter sachlich naheliegender Nichtberücksichtigung der a-priori-Null-differenzen, so landet man sofort bei der Varianz mit Nenner $n-1$. Dies erschwert aber die erwünschte Interpretation der Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert und lässt das Problem der erwartungstreuen Schätzung überhaupt nicht aufkommen, da dieses nur durch die Überrepräsentanz der - hier von Anfang an eben nicht berücksichtigten - a-priori-Null-differenzen entstünde. Das heißt: Die Varianz mit Nenner $n-1$ erscheint hier als die einzig „natürliche“ Varianz, nicht aber als erwartungstreuer Schätzer für die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert in der Grundgesamtheit.

Eine „saubere“ Auflösung dieses Dilemmas scheint es nicht zu geben. Die Struktur der Sache tut dem Didaktiker leider nicht immer den Gefallen, in eleganten geradlinigen Unterrichtswegen darstellbar zu sein. Die beste Lösung scheint mir zu sein, beide oben skizzierten Wege parallel zu gehen, das heißt, von Anfang an die Begriffsbildung einerseits mit, andererseits ohne a-priori-Null-differenzen nebeneinander zu stellen. Neben dem Ernstnehmen möglicher Schülereinwände bietet dies noch folgende Vorteile:

- Die Diskussion der strittigen Frage, ob man denn nun bei der Konstruktion eines Streuungsmaßes die a-priori-Null-differenzen berücksichtigen soll oder nicht, führt fast automatisch und sehr schnell zu der Erkenntnis, dass diese Frage für die Grundgesamtheit irrelevant ist, da

hier der relative Anteil dieser a-priori-Null differenzen ohnehin verschwindend gering ist, also praktisch null. Damit eröffnet sich aber sofort der Blick auf die inferenzstatistische Frage, welcher der beiden konkurrierenden Stichprobenstatistiken - mit oder ohne a-priori-Null differenzen respektive mit Nenner n oder $n-1$ - man denn für die Schätzung dieses einen identischen Populationsparameters den Vorzug geben sollte. Die Problematik der Erwartungstreue ergibt sich also für den Schüler gleichsam automatisch, nicht etwa nur durch den hinweisenden Lehrerimpuls, dass bei Statistikrechnern üblicherweise beide Berechnungsvarianten angeboten werden, ergänzt durch die Frage, welchen Sinn dies denn wohl hat.

- Die Interpretation der Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert ergibt sich ohne Probleme.
- Schließlich legt die Diskussion über die Berücksichtigung der a-priori-Null differenzen eine weitere probabilistische Perspektive nahe, und zwar im Rückgriff auch auf den Stochastikunterricht in der Sekundarstufe I: Denn unschwer lässt sich die Konstruktion des Streuungsmaßes im stochastischen Modell wiederholter zufälliger Ziehungen von jeweils zwei Messdaten aus der Grundgesamtheit interpretieren; die Populationsvarianz wäre dann die Hälfte der auf lange Sicht zu erwartenden durchschnittlichen quadratischen Differenz dieser beiden zufälligen Messwerte. In diesem Modell entspricht nun aber die Berücksichtigung der a-priori-Null differenzen einer Ziehung mit Zurücklegen (jeweils des ersten Paarlings vor Ziehung des zweiten), deren Nichtberücksichtigung einer Ziehung ohne Zurücklegen.

3. Ergänzung

Um möglichen Missverständnissen zuvorzukommen: Den Unterricht über Streuungsmaße „mittelwertfrei“ mit den Differenzen der Messwerte voneinander zu beginnen, dies macht nicht nur Sinn im Hinblick auf die hier geschilderte inferenzstati-

stische Perspektive. Denn:

1. Grundsätzlich zielt der Streuungsbegriff im elementarsten Sinne wohl zunächst einmal auf die Unterschiedlichkeit von Messwerten (und deren Trägern), nicht aber auf die Unterschiede der Messwerte von aggregierten Statistiken wie Mittelwert oder Median. Dass die durchschnittliche Unterschiedlichkeit der Messwerte voneinander im wesentlichen dem durchschnittlichen Unterschied der Messwerte von einer Statistik entsprechen kann, dies ist eine - durchaus nichttriviale - Erkenntnis, die es erst besonders legitimiert, den Streuungsbegriff (auch) auf dieses zweite Konzept zu gründen.
2. Dass diese Erkenntnis freilich nur gilt, wenn erstens die Unterschiede als quadratische Differenzen (und nicht etwa als absolute Differenzen) gefasst werden und zweitens die Bezugsstatistik das arithmetische Mittel (und nicht etwa der Median) ist, dies wiederum ist auch wichtig: Denn dies ist ein wesentlicher Grund, weshalb sich die „quadratische“ Varianz historisch - begrenzter Rechenkapazitäten wegen - gegenüber anderen inhaltlich möglicherweise viel angemesseneren Streuungsmaßen durchsetzen konnte. (Ein weiterer Grund ist der Bezug zur „quadratischen“ Normalverteilung.)

Literatur:

Diepgen, R. (1999): Warum nur $n-1$ und nicht n ? Erwartungstreue - leicht gemacht. - In: Stochastik in der Schule 19 (1999) Heft 1, S. 10-13

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Psych. Dr. Raphael Diepgen
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Psychologie
D-44780 Bochum
eMail raphael.diepgen@ruhr-uni-bochum.de