Beweisüberlegungen für das Integral über die Normalverteilungsdichte

Hans G. Schönwald, Siegen

Zusammenfassung: Die in der Überschrift formulierte Gleichung besagt, daß die Gaußsche Glockenkurve in der richtigen Normierung eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt; das macht die Aussage für die Stochastik interessant. Sie zu beweisen, ist nichttrivial; eine Möglichkeit dafür - auf anschaulichem Niveau - wird hier beschrieben. In einem leistungsstarken Kurs läßt sich dies nachvollziehen. Im Anschluß an diese - vom höheren Niveau aus - lediglich als Beweisskizze einzuordnende Überlegung wird einerseits auf deren Lückenhaftigkeit hingewiesen; andererseits wird die (didaktische) Fraglichkeit der (mathematischen) Lücke diskutiert. Schließlich wird auf weitere Beweismöglichkeiten hingewiesen.

1. Motivation

Bei der Behandlung der Normalverteilung kann in einem Leistungskurs die Frage aufkommen nach einem Beweis für die Normierung der Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve. Schon die Betrachtung des 10-DM-Scheines legt für mathematisch interessierte und vorgebildete Schülerinnen und Schüler diese Frage nahe. Da aber alle bekannten Beweise trickreich verlaufen bzw. höhere mathematische Werkzeuge erfordern, wird ein solcher Beweis, auch für den einfachsten Fall der Normal-(0,1)-Verteilung, in der Schule gern übergangen. Hier wird ein Beweis vorgestellt, der dadurch schulfähig modifiziert wurde, daß einige entscheidende Gedankenschritte anschaulich verpackt sind. Die Schülerinnen und Schüler können ihn nachvollziehend einsehen und auch überschauen. Jedoch bleibt auch diese Überlegung trickhaft. Die beliebte Frage: "Wie kommt man darauf?" muß unbeantwortet bleiben. Man kann ihr höchstens mit dem Hinweis entsprechen, daß hier eben Highlights aus einer Jahrtausende währenden gesamtmenschheitlichen Kultur mitgeteilt werden.

2. Programm für den Beweisgang und dessen Veranschaulichung

Zur Orientierung geben wir als erstes ein Programm für unseren Beweisgang: Wir geben dem interessierenden Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, \mathrm{d}t$$

den Namen I und betrachten (und erklären) zunächst ein damit verwandtes (Doppel)Integral, nämlich

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2}\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

und zeigen, daß das dadurch beschriebene (Relief-)Volumen einerseits gleich I^2 und andererseits gleich 2π ist.

Vorweg erklären wir dieses Relief: Die neue Integrandenfunktion (zweier Argumente) kann man sich so veranschaulichen, wie in der Geographie mit einem Landschaftsrelief die variable Dicke der Erdkruste (über N.N.) dargestellt wird; wir denken uns den "Graphen" zu

$$\mathrm{f}(x, y) = e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2}$$

als Relief: über der (waagrecht liegenden) x-y-Ebene erheben sich die Funktionswerte in z-Richtung. Es ist auf dem Cover dieser Zeitschrift als 3-D-Graphik dargestellt. Um die Gestalt dieses Reliefs genauer kennen zu lernen, fragen wir zunächst nach den Graphen auf den (senkrechten) Koordinatenebenen und nach den Höhenlinien. D.h.: Welche Funktionen stellen die Schnitte

$$\mathrm{f}_1(x) = \mathrm{f}(x,0) \quad \text{und} \quad \mathrm{f}_2(y) = \mathrm{f}(0,y)$$

dar? Und: Wo liegen die Höhenlinien unseres Reliefs, d.h. welche Linien innerhalb unseres Graphen werden von den Punkten mit gleichen f-Werten gebildet? Zur ersten Frage: Man sieht sofort, daß es sich beidemale und die (gewöhnliche) Glockenkurve handelt. Zur zweiten Frage: Potenzen mit der Basis e sind, da die Exponentialfunktion streng monoton steigt, genau dann gleich, wenn die Exponenten gleich sind. Also können Sie fragen: Für welche Koordinatenpaare (x,y) nimmt der Exponent $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ gleiche Werte an? Wegen

$$-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) = -\tfrac{1}{2}\,r^2 \quad \text{mit } r := \sqrt{x^2+y^2}$$

handelt es sich um die Kreise um den Ursprung in der x-y-Ebene. Damit ist erwiesen: unser Relief ist rotationssymmetrisch zur z-Achse. Etwas flacher als auf dem Cover dargestellt (Faktor 2 in z-Richtung) ähnelt es einem Ameisenhügel - mehr noch als einer Glocke. Noch etwas flacher läßt es sich aus (trockenem) Sand auf einem Schultisch aufschütten bzw. modellieren - und später wieder leicht und sauber in einem Eimer zurückschaffen. In einen solchen Sandhaufen lassen sich problemlos Papierblätter (senkrecht) hineinstellen; die Sandgrenze kann man - vorsichtig - mit einem Filzstift nachzeichnen; und das herausgezogene Blatt zeigt dann den Schnitt, nämlich eine Glockenkurve.

3. Der Beweis

Nun der Beweis, daß das Relief-Volumen I^2 beträgt: So wie man zur Garnierung von Salaten ein fest gekochtes Ei auf einem Ei-Schneider in viele dünne, beim Schneiden senkrecht stehende Scheiben zerlegt (und diese dann flach auf die Salate legt), so denken wir uns unser Ameisenhügel-Relief in viele dünne Scheiben parallel zur y-z-Ebene zerteilt (vgl. wieder das Cover dieser Zeitschrift). In der Mitte gibt es die größten Scheiben, weiter nach außen werden sie immer niedriger; aber alle besitzen die Gestalt von Normalverteilungen. Denn für jeden Schnitt bei einem (festen) Wert x_0 wird die Schnittfigur - als Fläche - durch

$$\mathrm{f}_{x_0}(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}x_0^2} \times & e^{-\frac{1}{2}y^2} \\ \text{konstant} \times & e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{cases}$$

beschrieben. Dessen Fläche können wir somit durch Integrieren nach y ermitteln; sie besitzt das Flächenmaß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{d}y = e^{-\frac{1}{2}x_0^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{d}y = e^{-\frac{1}{2}x_0^2} \times \mathrm{I}$$

und bei der Dicke dx besitzt die zugehörige Scheibe das Volumen $e^{-\frac{1}{2}x_0^2} \times \mathrm{I} \times \mathrm{d}x$. Diese Überlegung gilt für alle x_0-Werte ($\varepsilon\mathbf{R}$). Wenn wir nun alle diese Volumina aufsummieren, also integrieren, ergibt sich - wir schreiben wieder x statt x_0 - das Volumen unseres Ameisenhügels zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \times \mathrm{I}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}^2$$

Uns bleibt der Beweis zu führen, daß dieses Volumen (auch) 2π beträgt. Unser Relief ist rotationssymmetrisch; also müßte man es auch als Rotationsintegral berechnen können. Leider rotiert es um die "falsche" Achse; im Unterricht lernt man das Volumen von Körpern zu berechnen, die rotationssymmetrisch zur Achse der Integrationsvariablen sind. Was tun? Um wie gewohnt rechnen zu können, wechseln wir zur Umkehrfunktion und rotieren dann:

$$z = e^{-\frac{1}{2} r^2}$$

Wir vertauschen r und z und lösen nach dem neuen z auf:

$$r = e^{-\frac{1}{2} z^2}$$

$$\ln r = \ln e^{-\frac{1}{2} z^2} = -\tfrac{1}{2} z^2$$

$$-2 \ln r = z^2$$

$$z = \sqrt{-2 \ln r}$$

Da der Wertebereich der alten Funktion das Intervall [0, 1] war, haben wir nun das Rotationsintegral

$$\int_0^1 \pi \left(\sqrt{-2 \ln x}\right)^2 \mathrm{d}x, \text{ also } -2\pi \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$$

zu berechnen. Daraus erhält man das Rotationsvolumen zu 2π direkt über die ∫ ln-Formel als

$$-2\pi \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = -2\pi \left[x \ln x - x\right]_0^1 = -2\pi(-1) = 2\pi$$

oder - weil wir es nun gewohnt - sind auf geometrischen Umweg der Achsenspiegelung an der ersten Winkelhalbierenden als

$$-2\pi \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\infty}^0 e^x \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[e^x\right]_{-\infty}^0 = -2\pi(1-0) = 2\pi$$

Das war's. - Diese Darstellung führt einen "Fahrplan" in Schüler(innen)sprache aus, den Scheid 1986 (S. 114ff) beschrieben hat.

4. Ergänzungen aus mathematischer Perspektive

Vom hochschulmathematischen Standpunkt aus ist unser Beweis lückenhaft: bei allen Integralen ist deren Existenz hier nicht nachgewiesen worden; diese ist deshalb besonders fragwürdig, weil die Integrandenfunktionen von zwei Variablen abhängt und weil es sich durchweg um uneigentliche Integrale handelt. Daß die unendlichen langen "Flügel" einer Schnitt-Integral-Fläche nur ein endliches Maß besitzen, ließe sich noch mit Hilfe der Abschätzung

$$\exp\left(-\tfrac{x^2}{2}\right) < \exp(-|x|) \quad \text{für } |x| > 2$$

erklären. Auch ließen sich wohl die Fehler abschätzen, die der Rinde entsprechen, wenn wir uns - in einem weiteren Bild - unser Relief als Wurst-Laib vorstellten und dann auf einer Wurstschneidemaschine in dünne Scheiben zerlegt dächten. Beides und alle weiteren Fragen, die erst dabei deutlich werden, lassen sich zwar auf anschauliche Weise zufriedenstellend klären; aber das alles würde doch recht kompliziert und deshalb die meisten Schülerinnen und Schüler wohl mehr verwirren als ihnen helfen. Auch bringt ein Gebrauch abstrakter Begriffe zwar mehr gedankliche Ordnung und damit Überblick beim weiteren Nachdenken mit sich; aber hier erforderte der Gebrauch ein schülerübersteigendes Denkvermögen.

In der Hochschulmathematik gibt es drei recht populäre Wege, dieses Integral zu "knacken". Immer muß man einen gewissen Umweg gehen (siehe Scheid 1986).

(1) Aufgrund der Analyse der Gamma-Funktion, die allerdings technisch sehr aufwendig ist, ergibt sich unsere Gleichung aus den Formeln

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t \ , \quad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

mit der Substitution $t = 2t^2$ an der Stelle $x = 2$.

(2) Im Rahmen der Theorie der Mehrfachintegrale liegt wegen der Rotationssymmetrie unserer Integrandenfunktion der Weg über Polarkoordinaten nahe; ein Koordinatenwechsel im Mehrdimensionalen ist aber eine heikle Sache.

(3) Ein ebenfalls trickreicher, aber überaus eleganter Beweis läßt sich im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie führen; man nutzt dabei den lokalen Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace aus, und somit wird unser Integralwert $\sqrt{2\pi}$ schon von der Stirlingschen Formel her vererbt.

Literatur

Scheid, H.(1986): *Stochastik in der Kollegstufe.* - Mannheim: Bibliogr. Inst.