

## Wie lange dauert es, *Jack's Haus* zu bauen ?

Ralph Riddiough und John McColl,  
Department of Statistics, University of Glasgow, Scotland  
Übersetzung: Anke Strauß, Kronberg im Taunus

**Zusammenfassung:** In einer Klasse mit 14-jährigen Schülern wird durch Simulation beim 6-teiligen Rechteck-Puzzle *Jigsaw* experimentell ermittelt, wie oft man im Schnitt würfeln muß, um es zu vollenden. Analoge Überlegungen werden auf das kompliziertere Puzzle *Jack's Haus* angewandt. - Zwei Computerprogramme dazu runden die Überlegungen ab.

### Einleitung

In diesem Artikel beschreiben wir zwei Simulationen, die in einer Klasse mit 14-jährigen Schülerinnen und Schülern durchgeführt wurden. Beide Simulationen basieren auf einfachen *Jigsaw*- (d.h. Puzzle-)Spielen. Obgleich das offizielle Curriculum an schottischen Schulen in diesem Alter weder Wahrscheinlichkeitsrechnung noch Statistik beinhaltet, sind diese Simulationen geeignet, über entdeckendes Problemlösen bei wachsendem Schwierigkeitsgrad in stochastisches Denken einzuführen. Wir fügen Computer-Programme zum Simulieren dieser Probleme bei.

### Ein Sammelproblem

Das Sammlerproblem kommt in vielen verschiedenen Verkleidungen vor. Die folgende Version wurde als geeignete Hinführung zum *Haus, das Jack baut* ausgewählt. Es besteht aus einem Puzzle mit 6 Stücken, wie hier zu sehen:

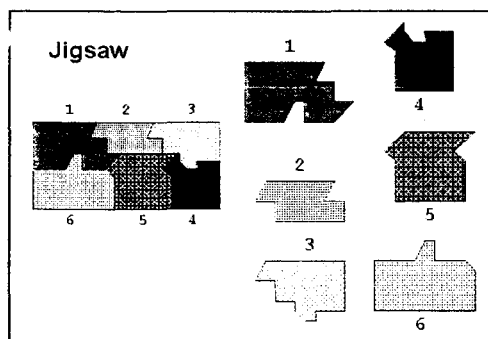


Abb. 1

Jedes Stück ist von unterschiedlicher Farbe und Form, und es ist sehr einfach, die Einzelteile zusammenzufügen. Unsere Regel ist nun, jeweils einen Würfel zu werfen und nur dasjenige Stück auszuwählen, das dieselbe Nummer trägt wie der Würfel zeigt. Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Teile sammelt. Die Frage ist: Wieviele Würfelwürfe benötigt man, um das Puzzle fertigzustellen?

### Simulation

Zur Vorbereitung benötigen wir einen Taschenrechner mit einem Zufallszahlengenerator. Diese Dezimalzahlen sind in ganze Zahlen von 1 bis  $M$  zu transformieren nach der Vorschrift  $\text{INT}(\text{Random} \cdot M) + 1$ .

Zur Motivation erinnerten wir an die wöchentliche Ziehung der Lotto-Zahlen, so daß  $M = 49$  eine naheliegende Wahl darstellte. Ein Taschenrechner mit Graphik-Display tat gute Dienste. Wiederholtes Drücken der Ausführungstaste lieferte die gewünschte Anzahl von Zufallszahlen. Wenn vorhanden, ist auch eine Software mit Tabellenkalkulation eine geeignete Quelle.

Für  $M = 6$  wurde danach das Werfen eines Würfels simuliert. Jeder Schüler trug durch eine Serie von 100 Zufallszahlen zur Klassengesamtheit (von 2300 Würfelwürfen !) bei. Obgleich die Verteilungen beim Einzel-Vergleich recht unterschiedlich aussahen, zeigte die Häufigkeitstabelle für die ganze Klasse eine bemerkenswerte Regularität, da jeder Ausfall mit ca. 17% auftrat. Der Rechner wurde daher als fairer, d.h. akzeptabler Ersatz für das reale Würfelwerfen akzeptiert.

Es ist anzumerken, daß etwa die Hälfte der Klasse ihre Würfelsimulation beim ersten Anlauf nicht korrekt vollendete. Beim Niederschreiben der 100 Zufallszahlen von 1 bis 6 tabellierten die meisten Schüler, indem sie alle 1en, dann alle 2en usw. zählten. Schlußendlich ergänzten sie, wohl um den Lehrer froh zu stimmen, die erforderliche Anzahl jeweiliger Ausfälle, um auf die Häufigkeiten zu kommen, die zuvor errechnet worden waren. Diejenigen wenigen Schüler jedoch, die zuerst die Ausfälle der Reihe nach auflisteten und erst dann die Häufigkeiten auszählten, beendeten bereits beim ersten Mal korrekt die Simulationsreihe.

Die Schüler wurden nun aufgefordert, per Simulation die folgende Frage zu beantworten:

„Wie oft muß man im Mittel einen Würfel werfen, um das Puzzle zu vollenden?“

Viele verschiedene Ergebnisse resultierten, wie im Punktediagramm Abb. 2 zu sehen:

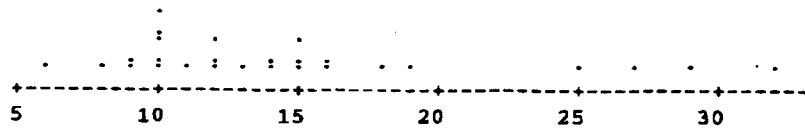


Abb. 2

Unter Zugrundelegung dieser Resultate berechneten die Schüler einen Mittelwert von 14,7, ein Ergebnis, das optimal mit dem theoretischen Wert übereinstimmt! Es wurde bemerkt, daß dieser Durchschnitt nicht in der Mitte der Datenmenge liegt, denn es gibt mehr Datenpunkte unterhalb des Mittelwertes als oberhalb. Der Median, das Minimum, das Maximum und die Spannweite wurden ebenfalls errechnet. Eine Schülerin vollendete ihr Haus mit der absoluten Minimalanzahl von 6 Würfeln.

**Jack's Haus**

Das Puzzle *The House That Jack Built* (der Firma J. W. Spear & Sons PLC) ist [in englischsprachigen Ländern] ein beliebtes Kinderspiel. Jeder Mitspieler muß ein einfaches Haus zusammenbauen. Das Puzzle besteht aus folgenden 10 Teilen:

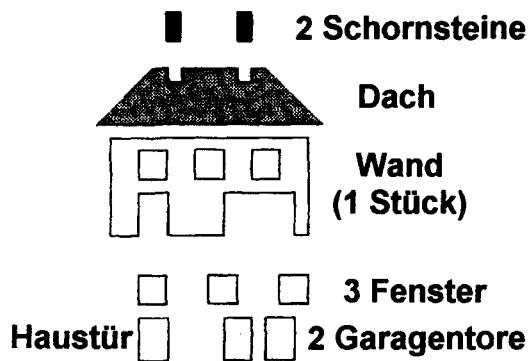


Abb. 2

Jedes der 6 verschiedenen Puzzle-Stücke ist farblich anders gekennzeichnet. Ein entsprechender 6-farbiger Würfel ist dem Spiel beige-fügt. Zeigt der Würfel eine bestimmte Farbe, kann man, selbst wenn mehr als 1 Teil von dieser Farbe noch zur Verfügung steht, nur ein solches Teil nehmen. Hat man etwa alle Teile

einer Farbe nach und nach gesammelt, kann man nur je 1 Teil bei passender Farbe anlegen.

Anders als beim oben beschriebenen einfachen Puzzle ist nun die Abfolge, in der man die Einzelstücke sammelt, ebenfalls von Bedeutung:

1. Man darf kein anderes Puzzleteil sammeln, bis man die Wand (1 Stück) hat.
2. Besitzt man die Wand, darf man außer den Schornsteinen alles sammeln.
3. Erst wenn man Wand und Dach hat, kann man Schornsteine sammeln.

Die Simulation dieses Puzzles ist um einiges näher an der Realität, in der komplexe Bedingungen häufig eine bedeutende Rolle spielen. Die Zahlen von 1 bis 6 wurden den verschiedenen Teilen des Hauses zugeordnet. Dabei ist die Zuordnung beliebig (man benötigt nicht unbedingt eine „6“ zum Start!). Wir einigten uns auf folgende Zuordnung:

- 1 → Wand;                    2 → Haustür;            3 → Fenster;
- 4 → Garagentor;            5 → Dach;                6 → Schornstein.

Die Durchführung der Simulation ist anspruchsvoll und fordert von den Schülern, effiziente Methoden zu entwickeln, um den Fortgang des Puzzle-Aufbaus in Abhängigkeit von den Regeln aufzuschreiben, während gleichzeitig die geworfenen Augenzahlen zu registrieren sind.

Eine Checkliste der folgenden Art → erwies sich als hilfreich:

Nr.	Hausteil	Hab ich!
1	Wand	<input type="checkbox"/>
2	Haustür	<input type="checkbox"/>
3	Fenster	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
4	Garagentore	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
5	Dach	<input type="checkbox"/>
6	Schornsteine	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Tab. 1

Das Punktediagramm Abb. 4 zeigt das Klassenresultat:

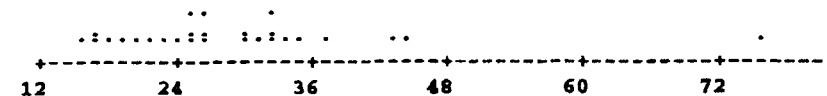


Abb. 4

Den Mittelwert errechneten wir zu 29,3. Wieder wurde registriert, daß er nicht in der Daten-Mitte liegt und daß mehr Ergebnisse unterhalb als oberhalb zu finden sind. In diesem Fall erzielte niemand das Minimum von 10. Ein außergewöhnliches Resultat lag bei 76.

**Computer-Simulationen**

Computer-Simulationen sind nützlich, um in der Klasse Erarbeitetes zu vertiefen und auszuweiten. Zwei kurze QBASIC-Programme sind daher angefügt. Die Ergebnisse werden als ASCII-Dateien für weitere Auswertungen abgespeichert. Als summarische Statistiken bei 1000 Simulationen ergab sich:

	Mittelwert	Median	Standard-abweichung	Minimum	Maximum
Jigsaw	14,707	13,000	6,785	6,000	57,000
Jack's Haus	31,771	30,000	10,388	12,000	79,000

Tab. 2

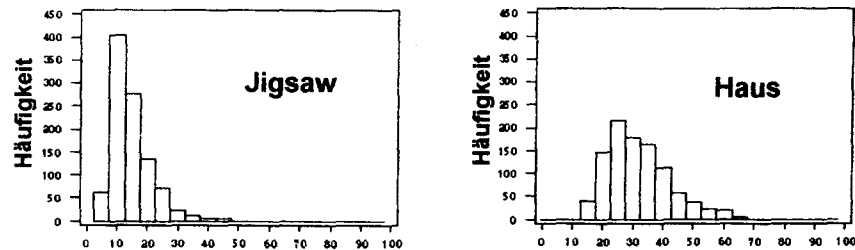


Abb. 5

Computersimulationen gestatten es, weitergehende Untersuchungen durchzuführen.

Zum Beispiel können, in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit der Schüler, folgende zusätzliche Aktivitäten initiiert werden:

1. Man untersuche, wie lange es im Mittel dauert, ein einfaches Puzzle mit einer anderen Teile-Anzahl (zum Beispiel 10) zu vollenden, wenn keine weiteren Bedingungen an die Abfolge der zu sammelnden Stücke gestellt werden.
2. Man untersuche, in welcher Weise Bedingungen über die Abfolge der zu sammelnden Stücke sich auswirken. Welchen Effekt haben mehrfach vorkommende Teile (z.B. 3 Fenster, 2 Garagentore, etc.) auf die durchschnittliche Zahl erforderlicher Würfelwürfe?

### Diskussion

Die oben beschriebenen Klassen-Aktivitäten erforderten einen Zeitraum von vier Unterrichtsstunden. Die Schüler waren mit Feuereifer bei der Sache. Die Simulationen erbrachten interessante Erkenntnisse, die zu weiteren Fragestellungen aus der deskriptiven Statistik motivieren können. Zum Beispiel können die Lage von Mittelwert und Median diskutiert werden. Dennoch ist die Untersuchung des „Mittelwerts“ nur ein Teil der Geschichte. Abhängig vom Alter der Schüler können auch Spannweite, Ausreißer, einfache graphische Präsentationen wie Punktediagramm und Histogramm, Standardabweichung usw. untersucht werden.

Wir haben bereits angemerkt, daß *Jack's Haus* aufgrund der erschwerten Sammel-Bedingungen eine gute Einführung in realistische Simulationen abgibt. Betrachten wir zum Beispiel ein Spiel namens *Beetle Drive*: Jeder Mitspieler muß einen Käfer zusammenbauen mit einem Körper, einem Kopf, zwei Fühlern, zwei Augen, sechs Beinen und einem Schwanz. Jede der sechs Seiten eines Würfels korrespondiert mit einem Körperteil, und das Spiel läuft im Prinzip wie bei *Jack's Haus* ab. Der Körper muß „gezogen“ werden, bevor irgend ein anderer Teil hinzugefügt werden kann, und der Kopf ist vor den Augen und Fühlern dran.

Einfache Spiele wie diese und gewisse Aspekte komplizierterer Spiele sind reiche Quellen von Problemen, die erfolgreich mittels Simulation gelöst werden können. Simulation ist ein mächtiges Verfahren, um Schülern Zugang zu interessanten Problemen zu verschaffen, selbst in den Fällen, in denen eine rechnerisch-theoretische Lösung entweder unbekannt ist oder über ihrem Leistungsvermögen liegt.

### Computer-Programm 1: Jigsaw

Die Ergebnisse werden in einem ASCII-File abgelegt, der in irgendeine Statistik- oder Tabellenkalkulations-Software zur weiteren Analyse eingelesen werden kann. Zeile 180 ist editierbar, wenn ein anderer Pfad-Name gewünscht ist oder während des Programms-Laufs angegeben werden soll. [Ich habe einige Programm-Teile „eingedeutscht“. Testläufe waren erfolgreich. *D.Ü.*]

```

100 CLS : RANDOMIZE TIMER
110 PRINT "Das Sammler-Problem!": PRINT
120 PRINT "Aus wievielen Einzelteilen besteht das Puzzle";
130 INPUT Nummer%
140 DIM Teil(Nummer%)
150 PRINT : PRINT "Wieviele Wiederholungen der Simulation";
160 INPUT Repet%
170 n$ = "C:\Result01.dat"
180 PRINT "Speichern des Ergebnisses in "; n$
190 OPEN n$ FOR OUTPUT AS #1
200 FOR p% = 1 TO Repet%
210 REDIM Teil(Nummer%)
220 i% = 0
230 DO
240 i% = i% + 1: Wurf = INT(RND * Nummer%) + 1
250 FOR j% = 1 TO Nummer%
260 IF Wurf = j% THEN Teil(j%) = 1
270 NEXT j%
280 set% = 0
290 FOR k% = 1 TO Nummer%
300 set% = set% + Teil(k%)
310 NEXT k%
320 LOOP UNTIL set% = Nummer%
330 PRINT #1, i%
340 NEXT p%
350 CLOSE : END

```

**Computer-Programm 2: Jack's Haus**

```

100 CLS : RANDOMIZE TIMER
110 PRINT "Das Haus, das Jack baute"; : PRINT
120 PRINT : PRINT "Wieviele Wiederholungen der Simulation";
130 INPUT Repet%
140 n$ = "A:\Result02.dat"
150 PRINT "Speichern des Ergebnisses in "; n$
160 OPEN n$ FOR OUTPUT AS #1
170 FOR p% = 1 TO Repet%
180 haustuer = 0: schornst = 0: fenster = 0: gartore = 0
190 start = 0: dach = 0: gebaut = 0: zaehler% = 0
200 DO
210 zaehler% = zaehler% + 1: wurf = INT(RND * 6) + 1
220 IF wurf = 1 THEN start = -1
230 IF wurf = 2 AND start THEN haustuer = haustuer + 1
240 IF wurf = 3 AND start THEN fenster = fenster + 1
250 IF wurf = 4 AND start THEN gartore = gartore + 1
260 IF wurf = 5 AND start THEN dach = -1
270 IF wurf = 6 AND dach THEN schornst = schornst + 1
280 IF haustuer > 0 AND fenster > 2 AND gartore > 1 AND schornst > 1 THEN
gebaut = -1
290 LOOP UNTIL gebaut
330 PRINT #1, zaehler%
340 NEXT p%
350 CLOSE : END

```

**Anmerkung der Herausgeberin**

In Arthur Engel, *Stochastik*, Stuttgart, Klett <sup>1</sup>1987, S.70f, wird das „Warten auf einen vollständigen Satz“ über die Mittelwertsregeln bei Markow-Ketten besprochen.  $T_n$  sei die Wartezeit auf einen vollständigen Satz von  $n$  verschiedenen Elementen. Dann gilt für den Erwartungswert

$$E(T_n) = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1-i}. \text{ Für einen guten Würfel ist } E(T_6) = 14,7, \text{ für einen ent-}$$

sprechenden 10-Würfel ist  $E(T_{10}) = 29,29$ . - In Arthur Engel, *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*, Stuttgart, Klett <sup>1</sup>1977, S. 161f, ist für das „Sammlerproblem“ ein rudimentäres BASIC-Programm abgedruckt.