# Eine Aufgabe aus dem Grundkurs Stochastik

von **Klaus Ulshöfer**, Sindelfingen

**Zusammenfassung:** Es wird von einer Übungsaufgabe zur Berechnung der Wahrschein-lichkeit eines Laplace-Experimentes berichtet. Dabei handelt es sich um ein k-aus-n-Problem, bei dem verschiedene Lösungswege angemessen zum Ziel führen.

Diese bescheidene Aufgabe ist spontan im Unterricht entstanden und hat den Schülern und dem Lehrer Spaß gemacht. Erfreulich wäre es, wenn viele Kollegen eigene Erfahrungen zur Verfügung stellen würden - wir brauchen Anregungen für unseren täglichen Unterricht -, diese dürfen auch bescheiden sein.

## Zur Unterrichtssituation

Das Thema war *''Zahlenlotto 6 aus 49 ohne Zusatzzahl''*. Festgestellt hatten wir:

''5 Richtige'' hat die Wahrscheinlichkeit $p_5 = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}$ und ''4 Richtige'' hat $p_4 = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$.

## Die Aufgabe

Dieter kreuzt auf seinem Schein versehentlich nur 5 Zahlen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter genau 4 Richtige?

## Vorüberlegungen

Man versuche nicht, Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, ohne vorher das Zufallsexperiment und insbesondere die Ergebnismenge anzugeben. Dieter kreuzt 5 Zahlen an. Dies kann ein Zufallsexperiment sein. Die Lotto-Gesellschaft wählt 6 aus 49 Zahlen aus - dies soll ein Zufallsexperiment sein, bei dem sogar jede Zahl die gleiche Chance hat, als ''Richtige'' deklariert zu werden. Da die Symmetrie gebrochen ist - die Lotto-Gesellschaft erzeugt 6-elementige Teilmengen, der Spieler aber 5-elementige Teilmengen -, erzwingt die Aufgabe vertieftes Nachdenken.

## 1. Lösungsweg

Dieter kreuzt 5 Zahlen an. Hierdurch wird die Menge von 49 Zahlen in zwei Teilmengen zerlegt - die eine enthält 5 ''D-Zahlen'' und die andere 44 ''nicht-D-Zahlen''. Diese





Zerlegung ist Dieter und uns bekannt, und wir überlegen mit ihm: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau 4 Richtige?

Am Samstag wird die Lotto-Gesellschaft ein Zufallsexperiment durchführen. Sie bildet eine Teilmenge mit 6 Elementen. Jede 6-elementige Teilmenge der Menge der ersten 49 natürlichen Zahlen ist ein mögliches Ergebnis. Ergebnismenge ist die Menge der 6-elementigen Teilmengen.

Diese Ergebnismenge hat $\binom{49}{6}$ Elemente. Unter diesen gibt es $\binom{5}{4}\binom{44}{2}$ Mengen, welche jeweils 4 D-Zahlen und 2 nicht-D-Zahlen als Elemente haben. Wir gehen davon aus, daß die Ziehung korrekt abläuft, daß ein Laplace-Experiment vorliegt. Dann hat das in der Aufgabe beschriebene Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\binom{5}{4}\binom{44}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{5 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 2} = \frac{15 \cdot 43}{\binom{49}{5}} \approx 3{,}38 \cdot 10^{-4}$$

## 2. Lösungsweg

Wir stellen uns vor, daß wir die Zukunft kennen. Dann zerlegt die Lotto-Gesellschaft die Menge der 49 Zahlen in zwei Teilmengen - eine Teilmenge enthält 6 Richtige, die andere 43 Falsche. Diese Zerlegung sehen wir als bekannt an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kreuzt Dieter 4 Richtige an?

Dieter führt ein Zufallsexperiment durch. Er wählt 5 Zahlen aus. Jede 5-elementige Teilmenge ist ein mögliches Ergebnis. Ergebnismenge ist die Menge der 5-elementigen Teilmengen der Menge der ersten 49 natürlichen Zahlen.

Diese Ergebnismenge hat $\binom{49}{5}$ Elemente. $\binom{6}{4}\binom{43}{1}$. Darunter gibt es Ergebnisse mit jeweils 4 Richtigen und einem Falschen. Wir wissen nicht, was Dieter ankreuzen wird. Für uns hat jede 5-elementige Teilmenge die gleiche Chance, von Dieter ausgewählt zu werden. Daher liegt ein Laplace-Experiment vor. Dann hat das in der Aufgabe beschriebene Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{1}}{\binom{49}{5}} = \frac{15 \cdot 43}{\binom{49}{5}} \approx 3{,}38 \cdot 10^{-4}.$$

**Zwischenbemerkung**

Die Aufgabe läßt alternative Lösungswege zu - daher ist sie besonders geeignet, kreatives Denken der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Schon hierdurch wird sie für den Mathematikunterricht wertvoll.

### 3. Lösungsweg

Warum nützen wir nicht aus, daß wir die Wahrscheinlichkeiten beim "regulären Wetten'' schon kennen?

Wir nehmen an, Dieter würde zunächst 6 Zahlen ankreuzen und danach wieder ein Kreuz ausradieren. So fassen wir den Vorgang als ein zweistufiges Zufallsexperiment auf.

Zum gewünschten Ergebnis kommt man nur auf zwei Wegen:

1. Weg: Dieter hat zunächst 5 Richtige und 1 Falsche und radiert 1 Richtige weg.
2. Weg: Dieter hat zunächst 4 Richtige und 2 Falsche und radiert 1 Falsche weg.

Die geforderte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$p = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \cdot \frac{5}{6} + \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6 \cdot 43 \cdot 5 + 15 \cdot 43 \cdot 42}{\binom{49}{6} \cdot 6} = \frac{43 \cdot 15 \cdot 44 \cdot 5!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{15 \cdot 43}{\binom{49}{5}} \approx 3{,}38 \cdot 10^{-4}.$$

**Anmerkung der Herausgeberin:**

Als Anregung für weitere Aufgabenstellungen zum o.a. Thema zitiere ich auszugsweise und nur auf das Zahlenlotto bezogen aus den hessischen "Teilnahmebedingungen für Zahlenlotto und Fußballtoto'' vom 31. Mai 1992, die vom Inhalt her wohl in allen deutschen Bundesländern gleich sind:

**§6 Spielereinsatz**
(3) Ein Zahlenfeld gilt als gespielt, wenn mindestens 3 Zahlen gekennzeichnet sind.
(4) Sind auf einem Spielschein in keinem Zahlenfeld mindestens 3 Zahlen gekennzeichnet, gilt das erste Zahlenfeld von links als gespielt.
**§15 Gültige Voraussagen**
(6) Hat ein Spielteilnehmer in einem Spiel des Zahlenlotto mehr als die festgesetzte Anzahl von Zahlen gekennzeichnet, so gilt nur die festgesetzte Anzahl von Zahlen in arithmetischer aufsteigender Reihenfolge, beginnend mit der kleinsten Zahl.
(8) Fehlen in einem Zahlenfeld, das gemäß §6 Abs. 3 und 4 als gespielt gilt, Voraussagen, so werden die fehlenden Voraussagen nach der höchsten gespielten Zahl in arithmetischer Reihenfolge ergänzt.
(9) Ist die höchste Zahl bereits gespielt, so werden die erforderlichen Voraussagen jeweils um die höchsten nicht gespielten Zahlen ergänzt.