

# SCHRANKEN FÜR DIE STICHPROBEN-STANDARDABWEICHUNG

von N.R. Farnum und R.C. Suich

Originaltitel: Bounds on the Sample Standard Deviation

Bearbeitung: S. Berghoff, Dortmund.

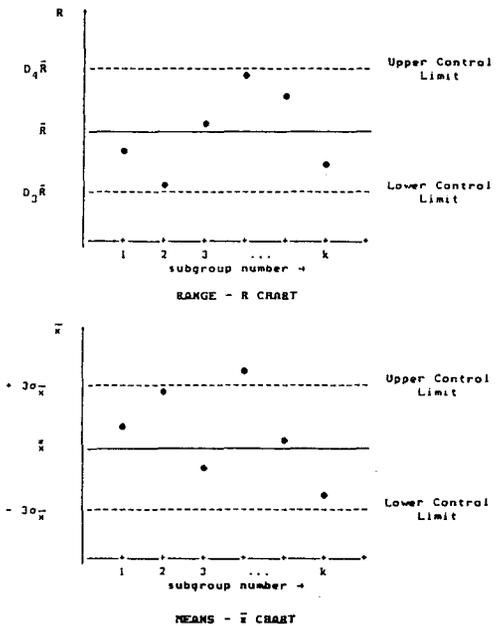
ZDM-Klassifikation: K 90

Statistical Process Control (SPC) steht für den Katalog statistischer Verfahren, die dazu dienen sollen, die Herstellung qualitativ hochwertiger Produkte zu erreichen und zu erhalten. Eine Vielzahl neuer Techniken sind seit Einführung von SPC um die Jahrhundertwende entwickelt worden, viele davon sind Erweiterungen der Kontroll-Diagramm-Technik, die von *W.A. Shewart* 1926 in Bell Labs (*Duncan*, 1974) entwickelt wurde.

Im wesentlichen werden Kontrolldiagramme benutzt, um die Ursachen für Qualitätsschwankungen der Produkte zu finden. Zu diesem Zweck werden periodisch kleine Stichproben erhoben und die Messungen bzgl. eines Qualitätsmerkmals auf einer Kontrollkarte erfaßt. Läuft der Produktionsprozeß ohne größere Störungen ab, sollten die auf der Karte eingetragenen Daten nicht zu stark um ihr langfristiges Mittel streuen. Falls andererseits irgendeine Störung auftritt, sollten auch die Punkte auf der Kontrollkarte erkennbare Abweichungen von ihrem Mittelwert zeigen.

Weit verbreitet sind heutzutage Kontrollkarten, die auf dem Mittelwert  $\bar{x}$  und der Spannweite (Range)  $R$  jeder Stichprobe basieren. Es werden verschiedene Diagramme verwendet, um die Änderungen dieser beiden Statistiken darzustellen. Zusammen sind diese Diagramme unter dem Namen "  $\bar{x}$  und R-Diagramme " bekannt geworden. Typische  $\bar{x}$  und R-Diagramme sind in Abb. 1 dargestellt.

Abb. 1



Das R-Diagramm ist eine einfache graphische Beschreibung der Variation zwischen den Stichproben der Messungen. Die Stichprobenspannweiten werden sukzessive aufgetragen, Kontrollgrenzen befinden sich oberhalb und unterhalb des durchschnittlichen Ranges  $\bar{R}$  im Abstand von drei Standardabweichungen (d.h.  $3\sigma_R$ ). Punkte innerhalb dieser Grenzen werden als durch die Stichprobenvariabilität begründet angesehen, Punkte außerhalb deuten auf Änderungen in der Produktionsqualität hin. Da die Stichprobenverteilung der Spannweite schwierig zu beschreiben ist (*Pearson*, 1942), sind Tabellen aufgestellt worden (*Duncan*, 1974, oder *Grant und Leavenworth*, 1980), welche die  $3\sigma$ -Grenzen als Faktoren  $D_4$  und  $D_3$  von  $\bar{R}$  enthalten (die Tabellen unterstellen, daß die Qualitätsmerkmale einer Normalverteilung genügen). Obere bzw. untere Kon-

trollgrenzen sind also  $D_4\bar{R}$  bzw.  $D_3\bar{R}$ . Kontrollgrenzen für das  $\bar{x}$ -Diagramm werden ähnlich berechnet und, falls alle Punkte zwischen diesen Grenzen liegen, wird angenommen, daß der Produktionsprozeß im Durchschnitt relativ konstant und stabil ist. Details findet man bei *Grant und Leavenworth*, 1980:

Falls die Punkte im  $\bar{x}$  und R-Diagramm innerhalb der Grenzen liegen, sagt man, der Prozeß ist "unter Kontrolle", d.h. er ist zeitlich stabil und die Produkte haben gleichbleibende Qualität. Die Variation zwischen den Stichproben ist also ein Maß für die erwartete Variation innerhalb der Erzeugnisse. Angenommen, das allgemeine Kontrolldiagramm besteht aus k Stichproben oder Untergruppen, jede vom Umfang n, benutzen wir die übliche Schätzung für die "Within-sample"-Variation:

$$s_p^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_k^2}{k}$$

wobei  $s_j^2$  die Stichprobenvarianz der j-ten Untergruppe ist. In diesem Artikel stellen wir drei Schranken für  $s_p$  vor. Diese Grenzen können mit Hilfe der Stichprobenspannweite des R-Diagramms berechnet werden und hängen nicht von Verteilungsannahmen über die Stichprobenspannweite ab.

#### Ein-Stichproben-Schranke

Das wesentliche, in den folgenden Herleitungen benutzte Mittel ist die Tatsache, daß für jede Stichprobe vom Umfang n gilt:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 \text{ wird minimiert, falls } c = \bar{x} . \quad (1)$$

Das heißt,  $\bar{x}$  ist der Kleinst-Quadrate-Schätzer für c. *Gutterman* (1962) zeigte mit Hilfe dieses Ergebnisses, daß eine nur von der Spannweite R abhängige obere Schranke für die Stichprobenstandardabweichung  $s_p$  gegeben ist durch

$$s_p \leq \frac{R}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1}} . \quad (2)$$

Herleitung:

Einsetzen des Stichprobenmidranges  $m = 1/2[\max(x_i) + \min(x_i)]$  in (1) ergibt

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 .$$

Da für alle i

$$\begin{aligned} |x_i - m| &= |x_i - 1/2 \max(x_i) - 1/2 \min(x_i)| \\ &\leq |\max(x_i) - 1/2 \max(x_i) - 1/2 \min(x_i)| \\ &= |1/2 \max(x_i) - 1/2 \min(x_i)| = R/2 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[ \frac{R}{2} \right]^2 = n \left[ \frac{R}{2} \right]^2$$

oder

$$s_p^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \frac{n}{n-1} \left[ \frac{R}{2} \right]^2 . \quad (3)$$

Wurzelziehen führt zu (2).

Interessant ist, daß diese relativ simple Schranke die KQ-Eigenschaft von  $\bar{x}$ , Stichprobenmidrange, Spannweite und Stichprobenstandardabweichung kombiniert.

#### Erste Schranke für $s_p$

Die Ein-Stichproben-Schranke in (2) kann für den k-Stichprobenfall erweitert werden, indem man die Ungleichung (3) auf jede einzelne Untergruppe anwendet. Damit ergibt sich

$$s_j^2 \leq \left[ \frac{R_j}{2} \right]^2 \frac{n}{n-1} \text{ für } j = 1, 2, \dots, k ,$$

also

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k s_j^2 \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[ \frac{R_j}{2} \right]^2 \frac{n}{n-1}$$

und wir erhalten

$$s_p \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k R_j^2 \frac{n}{n-1} \right]^{1/2} \quad (4)$$

Als Beispiel berechnen wir diese Schranke für folgende Daten von Duncan (1974), S. 435, Tabelle 21.1. Die ersten 20 Spannweiten dieser Daten ( $n = 5$ ) sind:

0,014 0,008 0,020 0,004 0,013 0,013 0,012 0,020 0,010 0,011  
0,018 0,006 0,016 0,023 0,003 0,025 0,016 0,023 0,025 0,007

somit ergibt sich für (4):

$$s_p \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{0,0050175}{20} \frac{5}{4} \right]^{1/2} = 0,00885$$

#### Zweite Schranke für $s_p$

Falls  $k$  groß genug ist, wie es z.B. bei der Auswertung eines R-Diagramms der Fall wäre, werden die Rechnungen unter (4) zu langwierig. In diesem Fall kann eine einfachere, etwas ungenauere Schranke, die nur das Mittel der Spannweiten ( $\bar{k}$ ) und die Spannweite der Spannweiten ( $W$ ) benutzt, hergeleitet werden. Diese beiden Werte können durch bloßes Hinschauen aus dem R-Diagramm gewonnen werden. Mit (1) können wir schreiben:

$$\sum_{j=1}^k (R_j - \bar{R})^2 \leq \sum_{j=1}^k (R_j - c)^2$$

mit  $c = 1/2 [\max(R_j) + \min(R_j)]$ . Da für jedes  $j$  gilt:  $|R_j - c| < \frac{W}{2}$ , wird die obige Ungleichung zu

$$\sum_{j=1}^k (R_j - \bar{R})^2 \leq k \left[ \frac{W}{2} \right]^2$$

Dies ergibt zusammen mit der bekannten Identität

$$\sum_{j=1}^k (R_j - \bar{R})^2 = \sum_{j=1}^k R_j^2 - k\bar{R}^2$$

die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^k R_j^2 \leq k [\bar{R}^2 + (W/2)^2]$$

Einsetzen in (4) ergibt

$$s_p \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{n}{n-1} (\bar{R}^2 + (W/2)^2) \right]^{1/2} \quad (5)$$

Mit den oben benutzten Daten erhalten wir  $\bar{R} = 0,01435$  und  $W = 0,025 - 0,003 = 0,022$ , somit ergibt (5):

$$s_p \leq \frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} [(0,01435)^2 + (0,022/2)^2] \right)^{1/2} = 0,01011$$

Die Schranke liegt etwas höher als die vorhergehende, da ja auch weniger Information benutzt wurde.

#### Dritte Schranke für $s_p$

Falls alle Punkte  $R_j$  zwischen die Kontrollgrenzen fallen, gilt:

$$W \leq \text{Obere Grenze} - \text{Untere Grenze} \\ = (D_4 - D_3)\bar{R}$$

Benutzen wir diese Ungleichung, so erhalten wir

$$s_p \leq \frac{\bar{R}}{2} \left( \frac{n}{n-1} \left[ 1 + (D_4 - D_3)^2/4 \right] \right)^{1/2} . \quad (6)$$

Angewendet auf unser Beispiel erhalten wir:

$$s_p \leq \frac{0,01435}{2} \left( \frac{5}{4} \left[ 1 + (2,115 - 0)^2/4 \right] \right)^{1/2} = 0,01168 ,$$

wobei wir die tabellierten Werte (für  $n = 5$ )  $D_4 = 2,115$  und  $D_3 = 0$  benutzt haben.

#### Schlußfolgerungen

Wir haben drei Schranken ((4), (5) und (6)) für die Variation zwischen den Stichproben vorgestellt, für den Fall, daß nur die Spannweite der Stichproben gegeben ist. Die erste ist zugleich die schärfste Schranke, sie benötigt auch die meiste Information und den größten Rechenaufwand. Die anderen beiden benutzen weniger Information, der Nachteil der größeren Ungenauigkeit wird ausgeglichen durch schnellere Berechenbarkeit. Auch können die hierzu erforderlichen Größen schnell aus dem R-Diagramm ersehen werden. Die Schranken wurden innerhalb der SPC entwickelt, sind aber durchaus allgemein verwendbar. Bemerkenswert ist, daß keine Verteilungsannahmen für die Stichprobenspannweite nötig sind.

#### Literatur

- DUNCAN, A.J. (1974): "Quality Control and Industrial Statistics", Irwin Homewood, Illinois.
- GRANT, E.I. and LEAVENWORTH, R.S. (1980): "Statistical Quality Control" (fifth edition), McGraw-Hill, New York.
- GUTERMAN, H.E. (1962): "An upper bound for the Sample Standard Deviation", *Technometrics* 4, S. 134-135.
- PEARSON, E.S. and HARTLEY, H.O. (1942): "The Probability Integral of the Range in Samples of  $n$  Observations from a normal population", *Biometrika* 32, S. 301.