

MIKRO-WELTEN AUS ZUFALLSQUADRATEN UND ZUFALLSSCHLANGEN

nach Peter J. Butt, City of London Schools

Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol. 8 (1986), Nr. 3:

Of the Micro-Worlds of Random Squares and Snakes

Übersetzung und Bearbeitung: I. Strauß

Anmerkung: Die Programme des Originalartikels sind wohl in Apple-LOGO geschrieben. Damit auch Benutzer von Commodore-Computern, wie sie in vielen unserer Schulen stehen, diese Programme ohne Probleme verfolgen können, hat die Bearbeiterin sie - mit manchmal leichten Veränderungen - in das (englische) IWT-LOGO übertragen. Diese Sprachvariante ist auch dem IBM-LOGO stark verwandt. Die entsprechenden Listings sind mit ' gekennzeichnet und zum Teil kommentiert. Hinzugefügt wurden auch einige inhaltliche Bemerkungen und Informationen. Alle Ergänzungen der Bearbeiterin sind in Schmalschrift geschrieben. Eine kurze Auslassung ist durch [...] kenntlich gemacht.

Es ist das Anliegen dieses Artikels, die Ausgangsüberlegungen zu drei Mikro-Welten mitzuteilen, die ursprünglich nicht für den Statistikerunterricht erdacht waren. Und da auch noch unser LOGO-Experiment etwas Vorübergehendes war, welches einstmaligen Ideen und Fragen erst in Gang brachte, ist es besonders schwierig, sich konzentriert zurückzuerinnern an das, was damals erörtert wurde. Es liegt in der Natur von Rückblicken, daß auch die Mathematik, sprich Statistik, mit abgehandelt wird; doch war es zunächst in erster Linie wichtig, daß unsere Schüler Zufallsprozesse einfach 'sehen' konnten.

Nachdem meine Schüler und ich Mikro-Welten unter Einbezug eines Zufallselementes 'erschaffen' hatten, ergaben sich sofort eine Reihe von Fragen, deren Beantwortung Statistik-Kenntnisse erfordert. Einige dieser Fragen, die wir selbst durch Methoden der Analysis nicht lösen konnten, gingen wir mit Zählverfahren an. Dies eröffnete uns häufig tiefere Einsichten insofern, als wir uns der Streuung der Ergebnisse recht bewußt wurden und nicht nur, wie oft in der Schulstatistik, allein auf den Erwartungswert schauten. Ein zweites Resultat dieser Mikro-Welten war, daß wir auf sehr einfache, und deshalb effektive, Simulation von Phänomenen des realen Lebens stießen, die ansonsten schwerlich akzeptiert worden wären.

Zufallsquadrate

Durch Listing 1 ist eine Prozedur gegeben, die ein Quadrat in zufälliger Bildschirm-Position zeichnet. Der Parameter SQUARE bezeichnet die Seitenlänge. Das Primitiv PICK n gibt eine natürliche Zufallszahl kleiner oder gleich n aus.

Listing 1:

```
RAND_SQUARE
  SETX PICK 280
  SETY ADD 20 PICK 160
  SQUARE 20
```

Durch Listing 1' ist eine Prozedur gegeben, die ein Quadrat in zufälliger Bildschirm-Position zeichnet. Der Parameter :SQUARE bezeichnet die Seitenlänge. Das Primitiv RANDOM :n+1 gibt eine natürliche Zufallszahl von 0 bis n, jeweils einschließlich, aus.

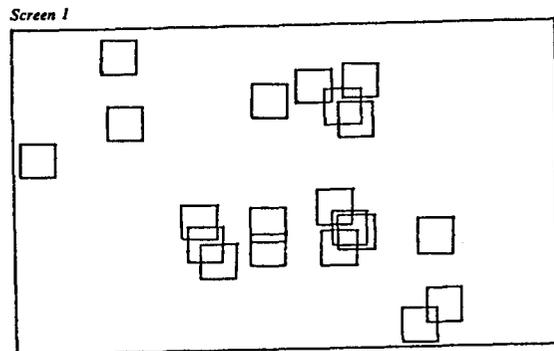
Listing 1':

```
TO RAND.SQUARE
  FULLSCREEN PENUP SETHEADING 0
  HIDETURTLE
  SETX ( - 160 + RANDOM 300 )
  SETY ( - 130 + RANDOM 240 )
  PENDOWN
  SQUARE 20
END
```

```
TO SQUARE :SEITENLAENGE
  REPEAT 4 [FORWARD
    :SEITENLAENGE RIGHT 90]
END
```

Bildschirmausdruck 1 (screen 1) ist ein Ergebnis des Befehls:

```
REPEAT 20 RAND_SQUARE          REPEAT 20 [RAND.SQUARE]
```



Hier einige Fragen, die durch solch eine Mikro-Welt von n zufällig placierten Quadraten provoziert werden:

- a) Wieviele Cluster oder, umgekehrt, wieviele einzelne Quadrate kann man erwarten?
- b) Welches ist die größte Zahl sich überlappender Quadrate? Für 20 Quadrate scheint es 3 zu sein. Kann diese Mikro-Welt als eine Simulation von Unglück betrachtet werden? Wenn etwa jede Bildschirm-Koordinate eine Person und ein Quadrat das Eintreten eines Ereignisses repräsentiert, dann kann es durchaus jemanden, den wir kennen, geben, der dreimal betroffen ist. Wenn wir solch eine Person nicht kennen, dann schlägt das Unglück nicht zufällig zu!
- c) Betrachten wir die durch ein Quadrat begrenzte Fläche als Maß für die Anzahl von Personen, die bei einer Meinungsumfrage interviewt werden. Die Mikro-Welt bestätigt, betrachtet man die nichtumschlossenen Bereiche, daß die Mehrzahl von uns niemals nach ihrer Meinung gefragt wurde und werden wird.

Die letzte Simulation veranlaßte eine - nicht mit LOGO bearbeitete - Untersuchung, betreffend den Flächenanteil, der durch die Quadrate umschlossen wird. Wir benutzten eine traditionelle Computersprache mit der Fähigkeit, die Quadrate auszumalen und die Farbe einer speziellen Bildschirm-Koordinate festzustellen. Es wurde ein Graph gezeichnet, bei dem die überdeckte Fläche gegen die Anzahl der Quadrate aufgetragen war. Der (lineare) Korrelations-Koeffizient und die Regressions-Gerade wurden errechnet und diskutiert mit Blick auf ihre 'Validität'. Während der Programmentwicklung ergab sich eine bemerkenswerte Diskussion, ob man besser systematisch oder zufällig den Bildschirm 'bemustert'. Selbst bei einer kompilierten Sprache dauert es recht lange, bis man ein Resultat erhält.

[...]

Interessante Zufallsquadrate

Die folgende Idee rührt von einer Programmier-Übung her, die sich mit der Datenstruktur von LOGO, der Liste, beschäftigte. Doch ergeben sich Konsequenzen in Bezug auf Konfidenzintervalle und Geraden bester Anpassung.

Im ersten Beispiel wird eine Liste von n zufallsgenerierten Koordinatenpaaren, welche als Mittelpunkte von Quadraten angesehen werden, erzeugt. Dann läßt sich ein Vergleich der von verschieden großen Quadraten, jedoch alle mit gleichen Zentren, gezeichneten Diagramme anstellen, siehe Listing 2 und Listing 2'.

Listing 2

```

NO_COORDS 'N
  MAKE 'CLIST [ ]
  REPEAT :N GEN_COORDS
GEN_COORDS
  MAKE 'CLIST JOIN
  :CLIST <ADD 99 PICK 121>
  MAKE 'CLIST JOIN
  :CLIST <ADD 34 PICK 121>
BORDER
  SETX 69 AND SETY 186
  SQUARE 182
DRW_SQRS 'SF
  NEW 'SFX2 AND MAKE
  'SFX2 (MUL 2 :SF)
  DRAW_AT 'CLIST
DRAW_AT 'CLIST
  IF EMPTYQ :CLIST THEN STOP
  SETX (SUB FIRST :CLIST :SF)
  AND SETY (ADD :SF FIRST REST
  :CLIST)
  SQUARE :SFX2
  DRAW_AT REST REST :CLIST

```

Listing 2'

Da in den obigen Befehlsfolgen die Zahlenangaben 4 und 20 m.E. die Seitenlängen der Quadrate und nicht deren Hälften angeben, habe ich entsprechend umprogrammiert. Bei Seitenlängen > 20 muß der Term [80 + RANDOM 152] in GEN.COORDS angepaßt werden.

```

TO NO.COORDS :N
  MAKE "CLIST [ ]
  MAKE "N 2 * :N
  GEN.COORDS
  END
TO GEN.COORDS
  MAKE "CLIST SENTENCE :CLIST
  MAKE "N :N-1/(-80+RANDOM 152)
  IF :N = 0 THEN STOP
  GEN.COORDS
  END
TO BORDER
  DRAW PENUP
  SETXY ( - 90 ) ( - 90 )
  PENDOWN
  SQUARE 182
  PENUP
  END
TO DRW.SQRS :SF
  MAKE "SF :SF
  DRAW.AT :CLIST
  END
TO DRAW.AT : CLIST
  IF EMPTY? :CLIST THEN STOP
  MAKE "X ITEM 1 :CLIST
  MAKE "Y ITEM 2 :CLIST
  PENUP
  SETXY :X - :SF / 2 :Y - :SF / 2
  PENDOWN SQUARE :SF
  DRAW.AT BUTFIRST BUTFIRST
  :CLIST
  END

```

```

TO SQUARE :S
  REPEAT 4 [FORWARD :S
  RIGHT 90]
  END

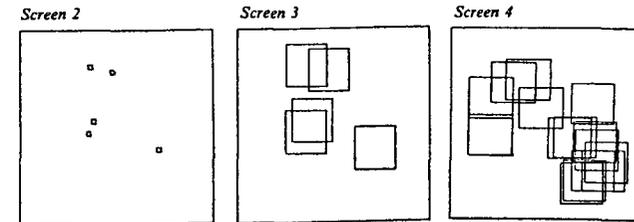
```

Screen 2 und Screen 3 sind Ergebnisse der Befehlsfolge

```

NO_COORDS 5
BORDER
DRW_SQRS 4 und DRW_SQRS 20
NO.COORDS 5
BORDER
DRW.SQRS 4 und DRW.SQRS 20

```



Beim Vergleich der beiden Bildschirmausdrucke wurde von meinen Schülern screen 3 als 'interessanter aussehend' bezeichnet als screen 2.

Gibt es also für eine gegebene Anzahl von Koordinatenpaaren eine optimale Quadratgröße für ein interessantes Diagramm?

Ich selbst hatte sehr wohl eine Vorstellung von dem Begriff 'mit welchem Vertrauen', als ich mich auf einen Wert für die optimale Größe festlegte und ich die Untersuchung mit einer anderen Liste von n Zufalls-Koordinatenpaaren wiederholte. Ich hielt während des Zeichenvorganges die Luft an bis ich sah, ob meine Werte 'korrekt' waren.

Die Untersuchung kann durch das Betrachten von Diagrammen mit verschiedenen Quadratanzahlen ausgewertet werden, s. screen 4.

Man vergleiche screen 3 und 4 mit Blick auf ein interessantes Diagramm. Existiert eine optimale Zahl von Quadraten für eine gegebene Quadratgröße?

Man vergleiche screen 2, 3 und 4 mit Blick auf ein inter-

essantes Diagramm. Welcher Zahlenwert ergibt sich für den Quotienten Quadratgröße/Anzahl der Quadrate?

Als ich diese Idee bei Gelegenheit Mathematik-Lehrern unterbreitete, ereiferte sich einer von ihnen: "Alle Befunde sind bloß subjektiv!" Aber können wir nicht doch Wahrscheinlichkeiten und Vertrauensgerade für unsere Auffassungen angeben?

Zufallsschlangen

Eine Idee von John Landsdown [1] legte folgende Programmierübung nahe: Man zeichne zufallsgenerierte aneinanderhängende Viertelkreise mit festgelegten (waagrechten/senkrechten) Tangenten, siehe Listing 3 und 3'. Der Aufruf SNAKE 30 produzierte mal screen 5.

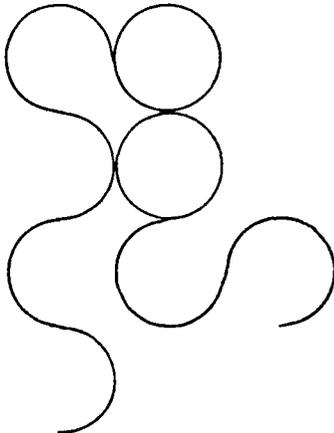
Listing 3

```
SNAKE 'N
  REPEAT :N IF (EQUALQ 1 PICK 2)
    THEN LEFT_QUAD
    ELSE RIGHT_QUAD
```

Listing 3'

```
Hier benutze ich das Kreisbogen-
Programm ARCS von der dem
Commodore-LOGO beigegebenen
Diskette UTILITIES.
TO SNAKE :N :RADIUS
  DRAW NOWRAP
  REPEAT :N [IF RANDOM 2 = 0
    THEN ARCL :RADIUS 90
    ELSE ARCR :RADIUS 90]
END
```

Screen 5



Diese Mikro-Welt produzierte ebenfalls eine Menge zusätzlicher Fragen. [...] Wir zitieren im folgenden nur einige statistisch relevante Probleme.

- a) Wie sieht die Verteilungsfunktion für die Anzahl der "intersections" bei gegebenem n aus? Eine entsprechende Verteilung könnte für die Anzahl der geschlossenen Gebiete erstellt werden.
- b) Wie sieht die Verteilungsfunktion für die Entfernung zwischen den Enden der Schlange aus? LOGO hat das Primitiv TOWARDS, mit dem man diesen Wert erhalten kann.

Diese Untersuchungen können ausgedehnt werden, indem man nachschaut, wie die Verteilungen unter Berücksichtigung der Anzahl der Viertelkreise variieren.

Kommentar

Man hört Kritik, daß LOGO-Graphik mit der Bildschirm-Turtle, verglichen mit anderen Sprachen, recht langsam ist. Doch das muß so sein, denn wir wollen und sollten ja Zeit haben, die Muster vorauszufühlen, die entstehen, vorausahnen, was wohl geschehen wird - um dann auch erstaunt zu sein, wenn es anders kommt. Es ist diese Langsamkeit der Turtle-Graphik, die es gestattet, zwischendrin Fragen zu stellen. Als wir die Mikro-Welt-Programme auf PASCAL umgeschrieben hatten, erschienen die Diagramme zwar 'im Nu', aber sie provozierten keine Fragen.

Positiv gesehen heißt das, LOGO ermutigt die Schüler, nach einem initiierten Vorschlag ihren eigenen Weg zu gehen. Lehrer sollten sich darin üben, ihren Schülern über die Schulter zu schauen, und wenn sich die Gelegenheit ergibt, kommentierend weiterzufragen: "Das sieht interessant aus. Wie oft geschieht denn so was? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ...?" Das heißt, LOGO ermöglicht es, die eigenen Ideen der Schüler in den Vordergrund zu stellen. Die von Schülern selbst entwickelten Mikro-Welten sind pädagogisch weit wertvoller als die vom Lehrer suggerierten.

Bedenkt man noch, daß die erste und dritte Mikro-Welt durch-

aus von Siebenjährigen hätte programmiert sein können, müssen wir dann nicht neu überdenken, von wann an statistische Ideen ins Curriculum eingeführt werden sollten?

Bisher haben wir wenig definitive Antworten auf die durch die Mikro-Welten angeregten Fragen erhalten. Jedoch ermutigt die gegenwärtige Begeisterung in der Pädagogik das Stellen von Fragen, aus denen sich forschende Untersuchungen zu ihrer Beantwortung entwickeln können.

Literatur

1. Computers in the Creative Arts. An NCC publications, 1973

Anmerkungen:

Zu S. 43 Mitte:

Die Quadrate auszumalen, ist auch in LOGO einfach. Die meisten LOGO-Schulbücher diskutieren ein FILL-Programm. Hier eine für das vorliegende Problem einfachere Lösung.

Listing 1''

```
TO SQUARE :SEITENLAENGE
  REPEAT :SEITENLAENGE / 2 - 1 [FORWARD :SEITENLAENGE RIGHT 90 FORWARD 1
    RIGHT 90 FORWARD :SEITENLAENGE LEFT 90 FORWARD 1 LEFT 90]
  FORWARD :SEITENLAENGE RIGHT 90 FORWARD 1 RIGHT 90 FORWARD :SEITENLAENGE
END
```

Ebenso ist es in LOGO möglich, direkt auf die Speicherplätze des Betriebssystems zuzugreifen. Den aus BASIC bekannten Routinen entsprechen hier im wesentlichen die beiden Befehle .EXAMINE und .DEPOSIT. So könnte man den Graphikschirm abfragen. Als weitere Lösung bietet sich an, in das der Diskette beigegebene Handbuch LOGO FÜR COMMODORE zu schauen, wo im Anhang sowohl ein mit LOGO-Primitives geschriebenes als auch in Maschinensprache umgeschriebenes Programm abgedruckt ist, das die Farbe der Pixels ändert. Die Bedingung, die z.B. die weiß gezeichneten Quadrat-Pixels in rote verwandelt, kann so ergänzt werden, daß sie diese Vorgänge gleichzeitig zählt.

Zu Listing 3':

Die ARC-Programme rufen CORRECTARC-Unterprogramme auf, die den Fehler ausgleichen, der beim Versuch entsteht, nichtganzzahlige Wiederholungen auszuführen.