

ZUR BERECHNUNG DER FEHLERWAHRSCHEINLICHKEIT 2. ART BEIM HYPOTHESENTEST

nach T.W. SHILGALIS, Illinois State University  
Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol. 8 (1986), Nr. 2:  
Computing Beta for an Hypothesis Test  
Übersetzung: J. Feuerpfeil

ZDM-Klassifikation: K70

Die Behandlung der Wahrscheinlichkeit  $\beta$  für die irrtümliche Annahme der Nullhypothese bei einem einfachen Hypothesentest (Fehler 2.Art) ist nach den Erfahrungen des Autors in einem Anfängerkurs über Mathematische Statistik ein schwieriges Unterfangen. Dieser Artikel soll darlegen, wie mit Hilfe von Computer-Programmen an einem anschaulichen Beispiel nicht nur eine graphische Interpretation von  $\beta$  sondern auch der Einfluß des Stichprobenumfangs auf  $\beta$  aufgezeigt werden kann.

Stochastik in der Schule, Heft 1, Band 7 (1987)

Das Beispiel beschäftigt sich mit einem üblichen Produktionsprozeß von Plastikstäbchen bei normalverteilter Reißfestigkeit  $X$  mit dem Mittelwert 50 N und der Varianz  $36 N^2$ . Man entwickelt ein neues Fertigungsverfahren und möchte die Nullhypothese testen, daß die Reißfestigkeit mehr als 50 N beträgt, während die Varianz unverändert mit  $36 N^2$  angenommen wird. Auf dem Signifikanz-Niveau 5 % ( $\alpha$ ) testen wir dann die Hypothese  $H_0: \mu = 50$  gegen die Alternative  $H_1: \mu > 50$ .

Bei einem Stichprobenumfang von  $n=9$  ist wegen der Normalverteilung von  $\bar{X}_9$  mit dem Mittelwert 50 und der Varianz  $36/9=4$  der kritische Wert für  $\bar{X}_9$  (Testschranke)  $\bar{X}_9^*=53.29$ . Bei einem Stichprobenumfang von  $n=25$  bzw.  $n=49$  sind die kritischen Werte  $\bar{X}_{25}^*=51.97$  bzw.  $\bar{X}_{49}^*=51.41$ .

Zur Berechnung von  $\beta$  bezeichnen wir mit  $\mu_1$  einen Wert der Alternative  $H_1$ . Bei  $n=9$  haben wir

$$\beta = P(\bar{X}_9 \leq 53.29 | \mu = \mu_1)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_9 - \mu_1}{2} \leq \frac{53.29 - \mu_1}{2} \mid \mu = \mu_1\right)$$
$$= P\left(Z \leq \frac{53.29 - \mu_1}{2}\right),$$

wobei  $Z$  standard-normalverteilt ist.  
Bei  $n=25$  erhalten wir

$$\beta = P\left(Z \leq \frac{51.97 - \mu_1}{1.2}\right),$$

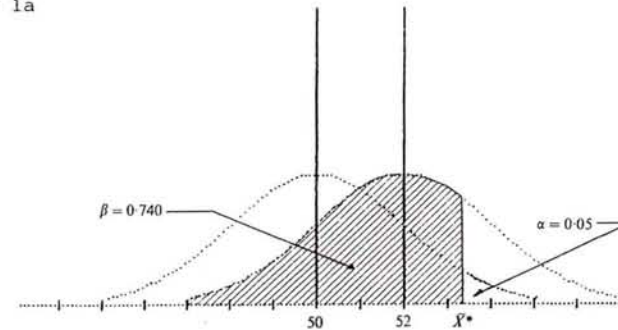
bei  $n=49$

$$\beta = P\left(Z \leq \frac{51.41 - \mu_1}{6/7}\right),$$

wobei  $\bar{X}_{25}$  und  $\bar{X}_{49}$  jeweils die Varianzen  $36/25$  bzw.  $36/49$  haben.  
Wählen wir z.B.  $\mu_1=52$ , so erhalten wir

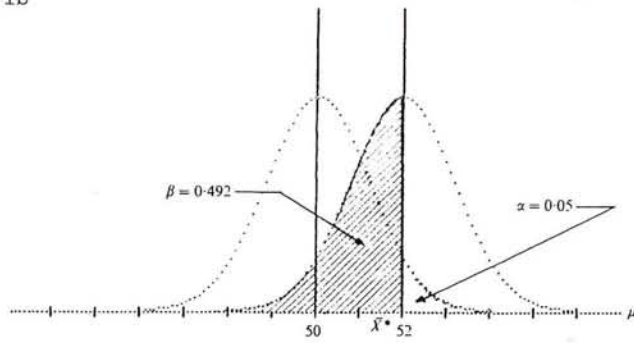
$$\beta = 0.740 \text{ für } n=9,$$
$$\beta = 0.492 \text{ für } n=25 \text{ und}$$
$$\beta = 0.254 \text{ für } n=49.$$

Figur 1a



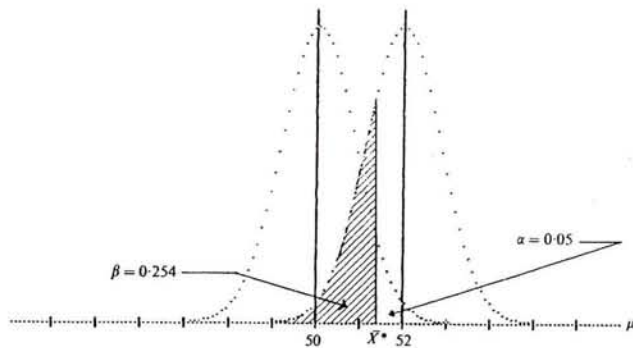
Stichprobenumfang  $n=9$   $N(50, 36/9)$  und  $N(52, 36/9)$

Figur 1b



Stichprobenumfang n=25 N(50,36/25) und N(52,36/25)

Figur 1c



Stichprobenumfang n=49 N(50,36/49) und N(52,36/49)

Figur 1 zeigt die Graphen der Dichtefunktionen von  $\bar{X}_9$ ,  $\bar{X}_{25}$  und  $\bar{X}_{49}$  unter der Nullhypothese  $\mu = 50$  und der Alternative  $\mu_1 = 52$ . Der Maßstab der Computergraphiken ist jeweils so gewählt, daß die unterschiedliche Gestalt der Graphen und der Einfluß des Stichprobenumfangs n deutlich wird.

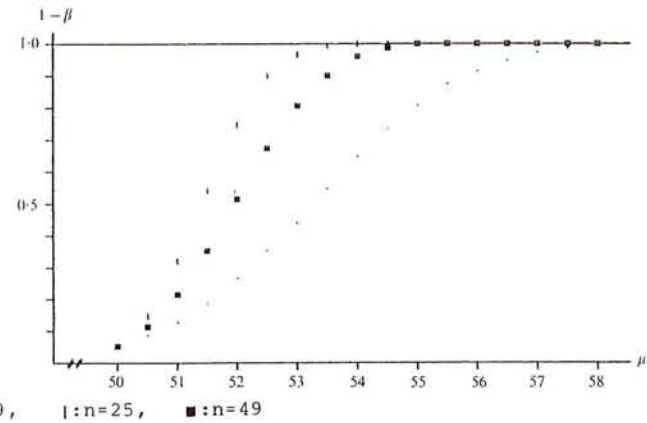
Um die Graphen der Gütefunktionen für die drei Stichprobenumfänge zeichnen zu können, werden die Werte von  $\beta$  für  $\mu_1$  von 50 bis 58 in Schritten von 0.5 berechnet, von denen Tabelle 1 nur die ganzzahligen Werte von  $\mu_1$  enthält.

Tabelle 1

$\mu_1$	$\beta$ (n=9)	$\beta$ (n=25)	$\beta$ (n=49)
50	0.95	0.95	0.95
51	0.874	0.791	0.684
52	0.74	0.492	0.254
53	0.56	0.196	0.039
54	0.36	0.046	0.0017
55	0.196	0.006	0
56	0.087	0	0
57	0.032	0	0
58	0.009	0	0

Figur 2 zeigt die Graphen der Gütefunktionen, die als Computergraphiken viel genauer sind als handgezeichnet.

Figur 2 Gütefunktionen



Overhead-Folien der Graphen in Figur 1 und 2 werden für die Diskussion in der Klasse benützt, zusätzlich erhalten die Schüler von den Graphen und von Tabelle 1 Fotokopien. Das Computerprogramm, das die Gütefunktionen von Fig. 2 liefert, enthält auch ein Beispiel für Gütefunktionen eines zweiseitigen Hypothesentests mit binomialverteilter Testgröße. Kopien aller Programme sind bei Einsendung einer leeren Diskette erhältlich; sie laufen auf einem Apple II Computer in

DOS 3.3. Leser, die keinen Apple-Computer besitzen, können auf Anforderung ein Listing der Programme erhalten, um sie für ihren Computer umschreiben zu können.