Abschätzungen für die Standardabweichung einer Stichprobe

von Allan J. Macleod und G. Robin Henderson, Scottish College of Textiles, Galashiels
Napier College of Commerce and Technology, Edinburgh

Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol.6 (1984):
Bounds for the Sample Standard Deviation

Übersetzung: Andreas Horn

Stochastik in der Schule, Heft 2, Band 5 (1985)

In einem Beitrag der Zeitschrift "Teaching Statistics" geben SHIFFLER und HARSHA [1] Abschätzungen für die Standardabweichung einer Stichprobe in Abhängigkeit von Spannweite und betragsmäßiger Abweichung vom Mittelwert an. Bezeichnet man die Werte einer Stichprobe vom Umfang n mit $x_1,\dots,x_n$ und deren Mittelwert mit $\bar{x}$, so gelten folgende Beziehungen:

Für die Standardabweichung: $$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$$

bzw. $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

Für die Spannweite: $R = (\text{größtes } x_i - \text{kleinstes } x_i)$

Für die betragsmäßige Abweichung vom Mittelwert: $$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|}{n}.$$

(In ihrem Artikel geben SHIFFLER und HARSHA $\hat{\sigma}$ und s für die Berechnung der Standardabweichung an. An dieser Stelle sei aber daran erinnert, daß s^2 im Gegensatz zu $\hat{\sigma}^2$ als Schätzwert für die Varianz erwartungstreu ist. Dennoch mag manchem Statistik-Lehrer der Ausdruck für $\hat{\sigma}$ einleuchtender erscheinen.)
SHIFFLER und HARSHA beweisen folgende Ungleichungen:

$$b \leq \hat{\sigma} \leq \frac{R}{2} \qquad (1)$$

$$b \leq s \leq \frac{R}{2}\cdot\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,. \qquad (2)$$

Die Anwendung dieser Beziehungen ermöglicht eine einfache Überprüfung der aus Stichprobenwerten berechneten Standardabweichung.

Im folgenden soll nun in Abhängigkeit von der Spannweite R eine andere untere Schranke angegeben werden, nämlich

$$\hat{\sigma} \leq \frac{R}{\sqrt{2n}} \qquad (3)$$

und somit nach (1) $$\frac{R}{\sqrt{2n}} \leq \hat{\sigma} \leq \frac{R}{2} \qquad (4).$$

Diese Abschätzung hat gegenüber (1) einige Vorteile:
Erstens enthalten die meisten Lehrpläne als Maß für die Streuung die Spannweite sowie die Standardabweichung, während nur selten die betragsmäßige Abweichung erscheint.

Zweitens muß sehr häufig die Berechnung der Standardabweichung mit Formeln, die Häufigkeiten enthalten, und vor allem für klassierte Daten vorgenommen werden (ein entsprechendes Ergebnis (6) wird für k Klassen der Breite d hergeleitet).

Beweis der Ungleichung (4):

Nach SHIFFLER und HARSHA ist die Abschätzung vom Mittelwert unabhängig, so daß $\bar{x} = 0$ gesetzt werden kann. Außerdem wird zur Vereinfachung angenommen, daß

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \text{ ist.}$$

Somit wird $$n\cdot\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + (x_1+R)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2\,.$$

Zur Bestimmung einer unteren Schranke sei nun festgestellt, daß

$$x_1^2 + (x_1+R)^2 = 2(x_1+\tfrac{R}{2})^2 + \frac{R^2}{2}$$

für $x_1 = -\frac{R}{2}$ und $\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2$ für $x_i=0$ $(i=2,\dots,n-1)$ minimal werden.

Daher ergibt sich aus den Daten

$$-\frac{R}{2},\ 0,\ \dots,\ 0,\ \frac{R}{2}$$

als Minimum für $\hat{\sigma}^2$ der Wert $\frac{R^2}{2n}$, d.h.

$$\hat{\sigma} \geq \frac{R}{\sqrt{2n}} \qquad (3).$$

Da SHIFFLER und HARSHA zeigten, daß $\hat{\sigma} \leq \frac{R}{2}$ ist, ist der Beweis von Ungleichung (4) erbracht.

Beispiel:

Ein Biologe untersucht fünf Blätter einer Platane auf die Auswirkungen einer Pilzerkrankung ("Teerflecken") und stellt folgende Werte für die befallene Blattfläche (in %) fest:

41 42 54 42 51 .

Für dieses Beispiel ergeben sich die Werte

$$\frac{R}{\sqrt{2n}} = 4{,}11 \quad \text{und} \quad \frac{R}{2} = 6{,}5.$$

Für den zwischen diesen Grenzen erwarteten Wert ergibt sich hier $\hat{\sigma} = 5{,}40$.

Die (4) entsprechende Ungleichung für s lautet:

$$\frac{R}{\sqrt{2(n-1)}} \leq s \leq \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \qquad (5).$$

Für das genannte Beispiel ergibt sich s = 6,04 zwischen den Werten 4,60 und 7,27.

Zur oberen Schranke von $\hat{\sigma}$

Die in (2) bzw. (4) genannte obere Schranke für $\hat{\sigma}$ kann nur für gerades n angenommen werden, und dieser Fall tritt ein, wenn

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n/2} = -\frac{R}{2}$$

und $x_{n/2+1} = x_{n/2+2} = \ldots = x_n = \frac{R}{2}$ ist.

Für n=3 ist die Datenmenge von der Gestalt

$$x_1, \quad -(2x_1+R), \quad x_1+R$$

und bei angenommener natürlicher Ordnung bedeutet dies

$$-\frac{2R}{3} \leq x_1 \leq -\frac{R}{3} .$$

Es folgt $\hat{\sigma}^2 = 2x_1^2 + 2x_1R + \frac{2}{3}R^2$

$$= 2(x_1 + \frac{R}{2})^2 + \frac{R^2}{6} .$$

Obiger Ausdruck zeigt, daß der maximale Wert von $\hat{\sigma}^2$ für $x_1 = -\frac{2R}{3}$ oder $x_1 = -\frac{R}{3}$ den Betrag von $\frac{2R^2}{9}$ erreicht und die obere Schranke von (4) für n=3 nicht angenommen wird.

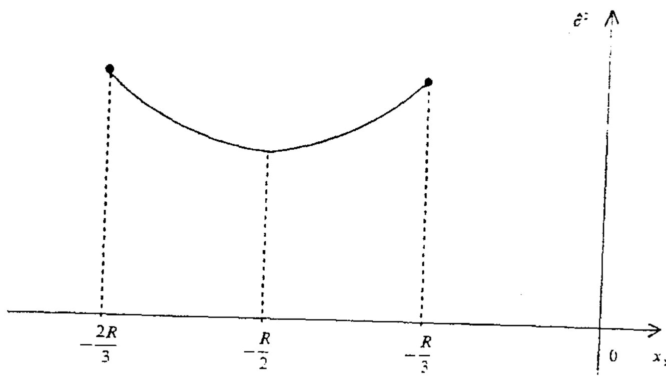

Bild 1: $\hat{\sigma}^2$ in Abhängigkeit von x_1 für n = 3.

Verallgemeinert erhält man für beliebiges ungerades n

$$\hat{\sigma} \leq \frac{\sqrt{p(p+1)}}{2p+1} \cdot R ,$$

wobei n = 2p + 1 ist. (Interessant ist, daß für $p \longrightarrow \infty$ der Ausdruck $\frac{\sqrt{p(p+1)}}{2p+1}$ gegen 0,5 strebt).

Klassierte Daten

Bei klassierten Daten ist die Spannweite R nicht genau zu bestimmen. Einen vergleichbaren Wert für die Schranken erhält man aber folgendermaßen. Liegen k Klassen der Breite d vor und ist die untere Grenze der ersten Klasse B, so ist leicht zu zeigen, daß

$$R \geq (B+(k-1)d)-(B+d) = (k-2)d \text{ gilt,}$$

und entsprechend $R \leq kd$.

Hieraus folgt

$$\frac{(k-2)d}{\sqrt{2n}} \leq \hat{\sigma} \leq \frac{kd}{2} . \qquad (6)$$

Beispiel:

Die Messung der Durchmesser einer Stichprobe von Stahlkugeln ergibt folgende Häufigkeitstabelle:

Durchmesser (mm)	Häufigkeit
45,05-45,55	2
45,55-46,05	4

Zur Einführung der Standardabweichung

von S.J. Wainwright, University College of Swansea

Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol.6 (1984):
How Should We Teach the Standard Deviation? - Revisited

Übersetzung: Andreas Horn

Zwei Wege zur Einführung der Standardabweichung bei Studenten untersucht
: zu dem Schluß, daß eine geeignete Methode
ıbweichung bei der Berechnung der Abweichung
ı, wobei Vor- und Nachteile aufgezeigt werden.
über den Schätzwert eines zentralen Lage-

ın zentralen Lagemaß F für die Stichproben-
ıst das 'Residuum'
- F eingeführt werden.

Lagemaße Zentralwert (Median) Y und Mittel-
siduen
zw. $r_i = Y_i - \overline{Y}$.

en Schätzwert' für die zentrale Lage, so
im wesentlichen eine Frage der Definition
für die Summe der absoluten Residuen oder
n Residuen das Minimum zu erreichen sucht,
tralwert und im anderen Fall der Mittelwert

chprobenumfang kann empirisch zeigen, daß im
willkürlichen Schätzwert für den Zentralwert
ert $\sum r_i^2$ minimal wird. An dieser Stelle
it und Verläßlichkeit eines Schätzwertes
gesprochen werden.

meinen sehr schnell, daß ein Schätzwert, für
ı Residuen minimal wird, größere und damit
ärker berücksichtigt als kleinere. Bei dieser
hingewiesen werden, daß Daten nicht nur um