

Eine Aufgabensequenz zum statistischen Hypothesentesten

von Raphael Diepgen, Bochum

Vorbemerkung

Die bislang praktizierten unterrichtlichen Wege zum Thema statistischen Hypothesentestens orientieren sich, soweit den gängigen Schulbüchern zu entnehmen ist, entweder an der mehr heuristischen Signifikanzkonzeption, wie sie ganz am Anfang der Entwicklung der Inferenzstatistik gestanden hat, oder an der Testtheorie von NEYMAN und PEARSON, die im Ausgang von den krassen argumentativen Lücken des simplen Signifikanzgedankens formuliert wurde. Der signifikanzorientierte Unterricht verbleibt bei dem ursprünglichen Signifikanzgedanken, nämlich der Idee, eine Hypothese als wenig plausibel zu verwerfen, wenn in einem Experiment Ereignisse eintreten, die sehr unwahrscheinlich sind, wenn die Hypothese gilt, Ereignisse also, die "signifikant" von dem abweichen, was man bei Geltung der Hypothese erwarten könnte. Keine nennenswerte Rolle spielt in dem signifikanzorientierten Angang der Fehler 2. Art und damit das Konzept der Teststärke oder Testgüte; der Signifikanztest erscheint als eine Verwerfungsregel, die nur den Fehler 1. Art in Rechnung stellt. Demgegenüber berücksichtigt der testtheoretisch orientierte Unterricht neben dem Kriterium der Signifikanz das Kriterium der Testgüte; hier erst wird der Signifikanztest als ein Entscheidungsverfahren diskutiert, das zwei Arten von Fehlentscheidungen riskiert.

Auch wenn der testtheoretisch orientierte Unterricht die Logik des Signifikanztestes einigermaßen stringent begründet und mit dem Konzept der Testgüte überhaupt erst im Gegensatz zum signifikanzorientierten Unterricht einen rationalen Umgang mit Hypothesentests ermöglicht, erscheint es mir didaktisch gerade auch im Hinblick auf einen aufgeklärten Gebrauch des inferenzstatistischen Instrumentariums günstiger, das Hypothesentesten einzuführen in der Sichtweise der modernen statistischen Entscheidungstheorie, wie es ja innerhalb der Hochschulmathematik inzwischen auch üblich ist. Ein derart entscheidungstheoretisch orientierter Unterricht berücksichtigt neben den Wahrscheinlichkeiten von Fehlentscheidungen auch deren Kosten; die statistische Entscheidungssituation wird umfassend repräsentiert mit den Problemparametern Hypo-

thesenwahrscheinlichkeiten, Fehlerkosten und Stichprobenkosten. Auch wenn die geringen wahrscheinlichkeits- und maßtheoretischen Vorkenntnisse auf der Schule diese Betrachtungsweise nur beim Test zweier einfacher Hypothesen gegeneinander, also beim Alternativtest, zulassen - denn beim Signifikanztestproblem mit zusammengesetzter Alternativhypothese benötigt man kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. -dichten für die a-priori-Verteilung sowie Integrale -, dürfte sie sehr lehrreich sein.

Es soll im folgenden vorgestellt werden eine entscheidungstheoretisch orientierte Unterrichtsreihe zum Hypothesentesten. Die Unterrichtsreihe wird strukturiert durch eine Folge von sechs Aufgaben, die anwendungsorientierte Probleme vorstellen, im Verlauf deren Bearbeitung der Unterricht die entscheidungstheoretisch orientierte Konzeption des Hypothesentestens entwickelt. Diese Aufgaben stehen also nicht unverbunden nebeneinander, sondern sie bilden ein System von aufeinanderbezogenen Problemen, die den Unterricht über längere Zeit strukturieren. Diese Aufgaben müssen im Unterricht natürlich durch Übungsaufgaben ergänzt werden. Dieses Aufgabensystem habe ich im Unterricht mit Erfolg erprobt; es dürfte praktikabel sein. Nach den hier aufgeführten Aufgaben sollte der Unterricht noch das sequentielle Testen thematisieren.

Nach der Darstellung der Aufgabenstellungen folgt ihre ausführliche didaktische Kommentierung. Als Hilfe finden sich im Anschluß daran kurze Lösungsskizzen.

Das Aufgabensystem

Aufgabe 1

Ein Unternehmen stellt Zwischenprodukte zur Weiterverarbeitung her, und zwar - etwa zu gleichen Teilen - auf zwei Produktionsanlagen: auf einer neuen Produktionsanlage A, bei der der Anteil mangelhaft produzierter Artikel 25 % beträgt, und auf einer alten Produktionsanlage B, die zu 50 % mit Mängeln behaftete Produkte herstellt. Die in einer Produktionsanlage hergestellten Artikel werden jeweils zu mehreren tausend Stück in Kisten verpackt und in dieser Stückelung als Qualität A bzw. B bei Herkunft aus der entsprechenden Anlage - natürlich zu unterschiedlichen Preisen - an das weiterverarbeitende Gewerbe verkauft.

Sozialök. Sachk. Heft 2, 5. Jg. (1985)

In der Versandstelle des Unternehmens stellt man nun fest, daß eine Kiste hinsichtlich der Qualität nicht gekennzeichnet ist. Rückfragen können die Herkunft der Kiste nicht mehr klären. Erkundigungen beim Vertriebschef, dem Chef der Rechtsabteilung und der Geschäftsleitung ergeben folgendes: Wird die Kiste fälschlich als Qualität A verkauft, obwohl sie nur von Qualität B ist, so muß das Unternehmen aufgrund von Schadensersatzforderungen und Konventionalstrafen mit einem Verlust von schätzungsweise 10.000 DM - bezogen auf den normalen Geschäftsgang - rechnen. Wird umgekehrt die Kiste als Qualität B verkauft, obwohl sie in Wirklichkeit von Qualität A ist, so entsteht - aufgrund des geringeren Verkaufspreises für Qualität B bei höheren Produktionskosten der Anlage A - ein Verlust von 1.000 DM.

Es besteht natürlich die Möglichkeit, der Kiste Artikel zu entnehmen und diese auf Mängel hin zu überprüfen. Diese Prüfung allerdings verursacht pro Artikel Kosten in Höhe von 5 DM.

Der Mathematiker des Unternehmens wird gebeten, für diese Situation - die leider immer wieder einmal auftritt - ein sinnvolles Entscheidungsverfahren zu entwickeln.

Aufgabe 2

Beim Bau von Präzisionsuhren verwendet eine Firma Schwingquarze aus zwei Qualitätsklassen mit unterschiedlichen Ausschußanteilen ("Qualitätsnorm erfüllt bzw. nicht erfüllt"). In der einen Qualitätsklasse beträgt er 10 % und in der anderen 20 %. Bei der Eingangskontrolle des Uhrenwerkes geht ein Kontingent von Quarzen ein.

Man weiß nun aus irgendwelchen Gründen nicht, ob statt der bestellten Quarze mit 10 % Ausschuß die schlechtere Qualität mit 20 % Ausschuß geliefert wurde. Es soll nun aufgrund der Überprüfung einer Zufallsstichprobe von 50 Quarzen entschieden werden, welche der beiden Qualitätsklassen vorliegt.

Die Uhrenfirma verwendet die Quarze 1. Qualität nur für teure Uhren, während die Quarze 2. Qualität in billige Uhren eingebaut werden. Der Einbau von hochwertigen Quarzen in billige Uhren würde jeweils einen Verlust von 15 DM bedeuten, der Einbau eines Quarzes 2. Qualität in

eine teure Uhr läßt einen Verlust von 12 DM erwarten aufgrund der Rückgabe dieser Uhr durch den Kunden wegen geringer Ganggenauigkeit.

Gefragt ist ein sinnvolles Entscheidungsverfahren.

Aufgabe 3

Zur Behandlung einer bestimmten Krankheit wird eine neue Therapie vorgeschlagen. Die Erfolgsquote der bislang üblichen Therapie für diese Krankheit beträgt 50 %. Versuchsweise wird nun die neue Therapie an einer Zufallsstichprobe von 20 Patienten mit der betreffenden Erkrankung erprobt.

Gesucht ist ein Entscheidungsverfahren zur Frage, ob sich die Erfolgswahrscheinlichkeit der neuen Therapie von der Erfolgswahrscheinlichkeit der herkömmlichen Therapie unterscheidet.

Aufgabe 4

Die Regierung eines Landes ist daran interessiert, möglichst früh am Wahltag abschätzen zu können, ob sie wieder die Mehrheit, d.h. mehr als 50 % der Wähler, gewonnen hat. Sie beauftragt daher ein Wahlforschungsinstitut, am Wahltag eine Zufallsstichprobe von 1000 Wählern unmittelbar nach ihrer Stimmabgabe über ihr Wahlverhalten zu befragen.

Entwerfen Sie ein sinnvolles Entscheidungsverfahren, das sich auf diese Befragung stützt.

Aufgabe 5

Lehrer D. ist daran interessiert, die Überlegenheit einer von ihm entwickelten Konzeption eines Statistikunterrichtes gegenüber der herkömmlichen Form im Hinblick auf ein bestimmtes Lernziel nachzuweisen. Dieses Lernziel wurde bisher in der herkömmlichen Konzeption nur von etwa 35 % der Schüler erreicht.

Lehrer D. unterrichtet nun seine neue Konzeption einer Zufallsstichprobe von 20 Schülern. Das fragliche Lernziel erreichen dabei genau 11 Schüler.

Herr D. entschließt sich nun zu einer inferenzstatistischen Überprüfung

auf einem Signifikanzniveau von 5 %. Die Nullhypothese besagt, daß die Wahrscheinlichkeit der Lernzielerreichung auch bei dem neuen Verfahren 0,35 betrage. Prüfgröße ist natürlich die Anzahl X der Schüler aus der Stichprobe, die das Lernziel erreichen. Nun wählt Herr D. als Ablehnungsbereich die einelementige Menge {11} und nennt damit sein Ergebnis signifikant bei 5 %.

Diskutieren Sie dieses Vorgehen.

Aufgabe 6

Ein Psychologe vermutet, daß die Schnelligkeit bei der Lösung von Denksportaufgaben abhängig ist davon, ob während der Bearbeitung ein Leistungsdruck besteht oder nicht. (Unklar ist allerdings, ob der Leistungsdruck die Schnelligkeit erhöht oder erniedrigt.) Den möglichen Effekt des Leistungsdruckes will der Psychologe experimentell klären:

- a) Mit einer Zufallsstichprobe von 9 Schülern kann er zwei Versuchsdurchgänge im Abstand von einer Woche durchführen. Im ersten Versuchsdurchgang gibt er jedem Schüler eine Reihe von Denksportaufgaben und mißt die durchschnittliche Zeit in Minuten, die der Schüler pro Aufgabe zur Lösung benötigt. Ein Leistungsdruck wird im ersten Durchgang nicht erzeugt. Im zweiten Durchgang wird dieselbe Prozedur mit einer gleichschwierigen Reihe von Denksportaufgaben wiederholt. Jetzt wird aber zusätzlich Leistungsdruck erzeugt (durch Instruktion, Kommentare usw.).
- b) Eine Stichprobe von 11 Studenten steht leider nur einmal zur Verfügung. Der Psychologe teilt daher diese Studenten nach Zufall auf in zwei Gruppen: Gruppe A aus 5 Personen erhält die Denksportaufgaben ohne Leistungsdruck, Gruppe B aus 6 Personen mit Leistungsdruck. Wieder wird für jede Versuchsperson - jetzt natürlich nur einmal - die durchschnittliche Lösungszeit gemessen.

Für beide Experimente ist zur Auswertung gefragt ein Signifikanztest zum 5 %-Niveau.

Ergebnisse der Experimente:

a) Versuchspers.Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1. Durchgang	10,0	7,9	9,1	8,4	9,5	7,3	7,5	8,7	9,3	("ohne")
2. Durchgang	9,5	6,4	8,1	8,1	7,8	7,9	6,7	8,8	7,4	("mit")
b) Gruppe A (5 Personen):			4,8	5,0	5,5	6,2	6,8			("ohne")
Gruppe B (6 Personen):		6,0	6,4	7,0	7,3	7,6	8,0			("mit")

Anmerkung:

Im folgenden Heft "Stochastik in der Schule" wird dieser Beitrag fortgesetzt. Der 2. Teil umfaßt ausführliche didaktische Kommentare sowie Lösungsskizzen zu den einzelnen Aufgaben.

I. Strauß