Pu (卜), die Weissagung

von Ingeborg Strauß

Das im folgenden vorgestellte, ca. 3000 Jahre alte chinesische Beispiel zur Stochastik ist das früheste (mir) bekannte überhaupt. Es eignet sich als Einstieg in das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung, kann jedoch ebensogut einen ganzen Kurs als 'roter Faden' begleiten oder den 'krönenden', nochmals Übersicht über alles Behandelte gebenden Abschluß bilden. Meines Wissens hat bisher noch kein Mathematiker auf dieses instruktive, stark motivierende Beispiel aufmerksam gemacht.

Aus Platzgründen ist es nicht möglich, die Gegebenheiten angemessen ausführlich vorzustellen. Es muß daher auf meine Quelle, den Artikel "Chinesische Orakelknochen", geschrieben von dem Professor für orientalische Sprachen an der Universität von Kalifornien in Los Angeles, Hung-Hsiang Chou, und - mit bemerkenswerten Abbildungen versehen - veröffentlicht in der Zeitschrift "Spektrum der Wissenschaft" im Juni 1979, verwiesen werden. Nur soviel sei zitiert:

"In der Zeit der Shang-Dynastie (etwa 1450 bis 1050 vor Christus) verwendete man Schriftzeichen, um den Rat der Ahnen einzuholen. Man schrieb seine Fragen auf einen „Orakelknochen". Bevorzugt wurde dafür das Schulterblatt eines Ochsen oder der Bauchpanzer einer Schildkröte. Um die Antwort zu erhalten, wurde der beschriftete Knochen erhitzt, bis sich auf seiner Oberfläche Risse zeigten. Deren Verlauf bestimmte, ob die Antwort günstig oder ungünstig ausgefallen war.

Da sich die Schulterblätter nur mit Mühe bearbeiten und beschriften ließen, verwendete man immer häufiger den Bauchpanzer der Schildkröte, der leichter zu präparieren war. Auch aus den Knochen von Ziegen und Schafen, aus Geweihen und sogar aus menschlichen Schädeldecken wurden Orakelknochen gefertigt. ... Die in die Unterseite des Knochens eingeschnittenen Kerben und Kreise sorgten dafür, daß sich /nach Erhitzen/ jeweils zwei Risse bildeten, die zusammen eine dem Schriftzeichen „pu" ähnliche Figur ergaben. ... Das Zeichen ist noch heute Bestandteil der chinesischen Schrift und bedeutet „Weissagung". ...

Der Zufall bestimmte den Winkel, den die beiden Risse miteinander bildeten.

Wich dieser um weniger als zwanzig Grad von einem rechten Winkel ab, so hatte die Frage eine bejahende Antwort erhalten. War der Winkel kleiner als 70 oder größer als 110 Grad, so galt die Antwort als negativ. ...

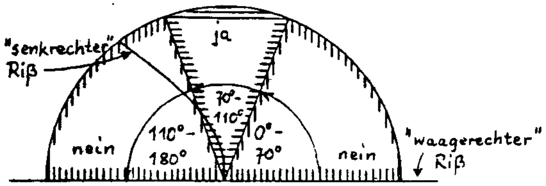
Wörtlich lauteten einige Orakelfragen so:

Am 15. Tag fragte der Wahrsager Cheng: Wird es morgen, am 16. Tag, regnen? Am 15. Tag fragte der Wahrsager Cheng: Wird es morgen, am 16. Tag, nicht regnen? ...

Wird der König von Zahnschmerzen gequält werden? Wird der König nicht von Zahnschmerzen gequält werden?

Diese antithetische Frageweise hing natürlich mit der Art des Orakelzeichens zusammen, das die Frage beantwortete. Sie hatte zur Folge, daß Schildkrötenpanzer besonders ökonomische Orakelknochen waren, denn sie sind von Natur aus recht symmetrisch in einzelne Platten unterteilt und konnten daher mehrere Fragepaare aufnehmen."

Wie gut stehen die Chancen für "ja" oder "nein" bei einem "senkrechten" Riß? Verschiedene Zuordnungsmöglichkeiten Riß ⟶ Antwort bieten sich an, diese naheliegende verwende ich hier:



Das Rißende liegt im nein-Bereich, also Antwort: nein.

$P(ja) = \frac{2}{9}$, $P(nein) = \frac{7}{9}$.

Daß stets zwei dasselbe Problem betreffende Fragen gestellt werden, scheint der 'Absicherung' zu dienen, denn eindeutig fällt die Antwort nur dann aus, wenn "ja" und "nein" kombiniert erscheinen. Gleichlautende Ergebnisse dagegen widersprechen sich und machen eine erneute Befragung des Orakels notwendig.

$P(ja \wedge ja) = \frac{4}{81} \approx 0{,}049$, $P(nein \wedge nein) = \frac{49}{81} \approx 0{,}605$,

$P(ja \wedge nein) = P(nein \wedge ja) = \frac{14}{81} \approx 0{,}173$,

$P(\text{eindeutiges Ergebnis}) = \frac{28}{81} \approx 0{,}346$,

$P(\text{widersprüchliches Ergebnis}) = \frac{53}{81} \approx 0{,}654$.

Fünf antithetische Fragenpaare lassen sich auf einem Schildkrötenpanzer unterbringen, das ergibt $A(10) = 2^{10} = 1024$ mögliche verschiedene Einzel-Antworten bzw. $B(5) = 2^5 = 32$ mögliche verschiedene Orakel-Antworten.

Allgemein: $A(2n) = 2^{2n}$, $B(n) = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}^*$.

Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten für (z.B.)

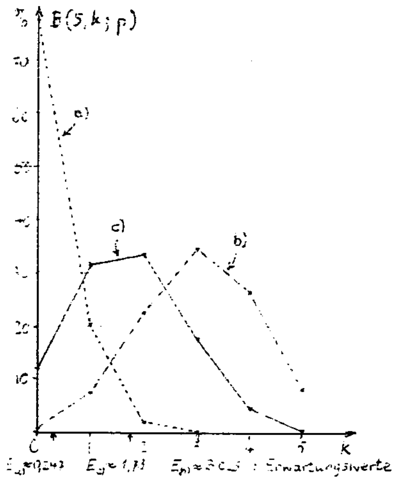
a) k ja∧ja-Ergebnisse,

b) k nein∧nein-Ergebnisse,

c) k eindeutige Aussagen

bei n antithetischen Fragepaaren liefert die Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Benutzung der Binomialverteilung $B(n,k;p) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ mit $p_{a)} = \frac{4}{81}$, $p_{b)} = \frac{49}{81}$, $p_{c)} = \frac{28}{81}$ die Resultate.

Für den a.a.O. besonders aufgeführten Fall n = 5 seien die eben genannten Fragen anhand der folgenden drei Graphen beantwortet:



Zusätzliche Aufgaben könnten so lauten:

d) Zeichnen Sie für n = 5 den Graphen der Wahrscheinlichkeiten für k-mal "ja", $k \in \{0,1,2,\dots,2n\}$.
Lösung über $B(10,k;\frac{2}{9})$.

e) Tragen Sie in dasselbe Koordinatensystem ein, zu wievielen eindeutigen Orakelsprüchen es in Abhängigkeit von k kommen kann.

f) Registrieren Sie zusätzlich, wie sich bei mehreren Möglichkeiten pro k die einzelnen Fälle untereinander aufteilen.

Das Resultat aus d), e) und f) sehen Sie nun in einer von vielen Darstellungsformen: siehe nächste Seite.

Und eine letzte Anregung:

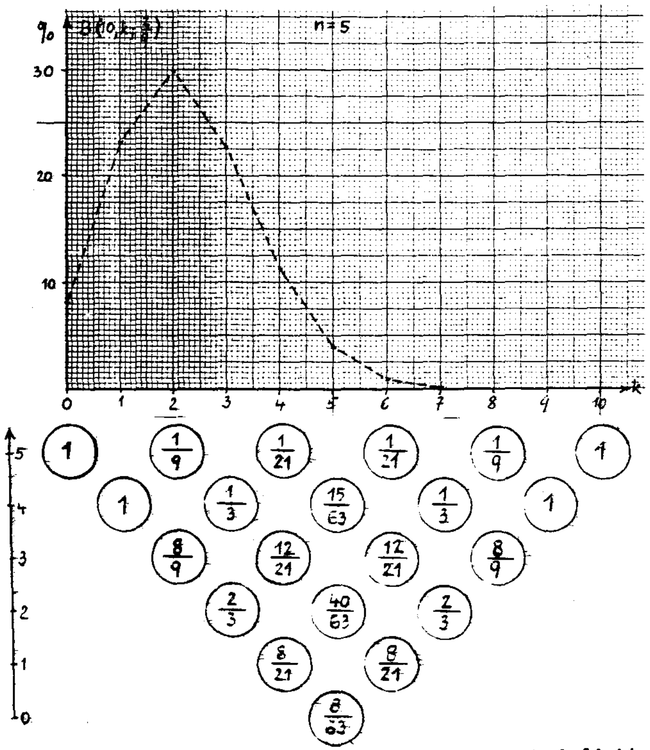
g) Wie oft muß man die Befragung durchführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% für ein bestimmtes Fragenpaar eine eindeutige Antwort zu erhalten?

Lösung: $\frac{28}{81} + \frac{53}{81}\cdot\frac{28}{81} + (\frac{53}{81})^2\cdot\frac{28}{81} + \dots + (\frac{53}{81})^n\cdot\frac{28}{81} \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow \quad (\frac{53}{81})^0 + (\frac{53}{81})^1 + (\frac{53}{81})^2 + \dots + (\frac{53}{81})^n \geq 0{,}95\cdot\frac{81}{28}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1-(\frac{53}{81})^{n+1}}{\frac{28}{81}} \geq 0{,}95\cdot\frac{81}{28} \Leftrightarrow 0{,}05 \geq (\frac{53}{81})^{n+1} \Rightarrow n \geq 6{,}06\dots$

$\Rightarrow \quad n = 7.$



Eindeutige Orakelantworten und ihre Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von k

Schlußgedanken:

Aus dem zu Beginn zitierten Artikel geht nicht hervor, ob wirkliche Ergebnisse von Orakelbefragungen überliefert sind. Erst wenn solche Informationen, und zwar in zahlreicher Form, bekannt wären, könnte man die Richtigkeit der oben angestellten Überlegungen prüfen. Denn wer garantiert, daß die implizite Annahme der Gleichverteilung der Risse über den ganzen 180^{0}-Bereich richtig ist? Zwar führt Prof. Chou nichts Näheres dazu aus, doch ist Vorsicht wohl geboten, da aufgrund der natürlichen Unebenheiten z.B. eines Schildkrötenpanzers durchaus Abweichungen von der angenommenen Gleichverteilung pro Brandstelle sowie zwischen je zwei zu einem antithetischen Fragenpaar gehörigen Brandstellen und auch wiederum zwischen den verschiedenen (hier fünf) Fragenpaaren untereinander auftreten können. Und von Orakelknochen zu -panzer zu -schädel etc. sind si-

cherlich nochmals Variationen zu konstatieren. Zudem, wie verhält sich eine organische Substanz, sei sie aus Holz, Horn oder Knochen, wenn zum Beispiel die Richtung des "waagerechten" Risses recht nahe dem des "senkrechten" zu verlaufen beginnt: führt die Sprödigkeit des Materials vielleicht zu einer Vereinigung beider Risse, sodaß etwa bei Winkeln zwischen 0^{0} und 2^{0} sowie 178^{0} und 180^{0} gar kein gesonderter "waagerechter" Riß ausgebildet wird? Auch dann wären die o.a. Erörterungen über die auftretenden Wahrscheinlichkeiten unkorrekt gewesen: Fragen über Fragen, die sich (noch) nicht lösen lassen, deren man sich jedoch bewußt sein muß.