VERNÜNFTIGE MITTELWERTE, ABER FALSCHE AUSSAGEN*)

A. K. SHAHANI

übersetzt von Bernd Wollring

Mittelwerte sollen die wesentlichen Eigenschaften einer Datenserie oder einer Zufallsgröße in einfacher und knapper Form wiedergeben. Wie jede andere Zusammenfassung kann auch ein Mittelwert irreführend sein, falsch verwendet oder mißbraucht werden. Es gibt eine beachtliche Menge an Literatur zu diesem Aspekt der Mittelwerte, das Buch von *D. Huff* (1973) ist ein besonders lesenswerter Beitrag. In einem gewissen intuitiven Gebrauch von Mittelwerten liegt die Quelle eines Fehlers, der sehr schwerwiegend sein kann und oft nicht erkannt wird. Diese Fehlerquelle erläutern wir anhand eines Problems zur Qualitätskontrolle, eines Projektes, eines Experimentes und eines Spiels. Schließlich gibt eine Taylorentwicklung Einblick in das Zustandekommen dieses Fehlers.

Ein Problem zur Qualitätskontrolle

Eine Firma bezieht bestimmte Teile in Lieferungen zu je 5000 Stück. Bisher ging man so vor, daß jede Lieferung vollständig geprüft wurde, bevor man sie der weiteren Produktion zuleitete. Die bisherigen Untersuchungen von 1000 Lieferungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Anteil defekter Teile je Lieferung in %	1	2	3	4	5	6
Anteil betroffener Lieferungen in %	15	20	25	20	10	10

Tabelle 1

*) Originalartikel in 'TEACHING STATISTICS' (1981) Heft 2, Band 3 'Reasonable Averages that give Wrong Answers'

Jedes defekte Teil, das in der Produktion verwendet wird, erzeugt einen Verlust von 1 DM. Drei Optionen stehen nun zur Wahl:

1) Es wird verfahren wie bisher, jede Lieferung wird vollständig geprüft. Das kostet 160 DM je Lieferung.

2) Die Teile werden ohne jede Prüfung verwendet.

3) Zunächst werden 100 Teile einer Lieferung geprüft, die Kosten dafür sind 10 DM. Danach wird entschieden, ob die Lieferung ohne weitere Prüfung für die Produktion angenommen oder ob sie zurückgewiesen wird. Eine abgelehnte Lieferung muß komplett geprüft werden, die Inspektion der restlichen 4900 Teile kostet 160 DM.

Für welche Option sollte man sich entscheiden? Eine Argumentation geht folgendermaßen vor:

Nach den bisherigen Ergebnissen ist der durchschnittliche Anteil defekter Teile je Lieferung 1 · 0,15 + 2 · 0,2 ..., 6 · 0,1 = 3,2 %, so daß man im Durchschnitt 5000 · 3,2 % = 160 defekte Teile je Lieferung erwartet. Die Optionen 1) und 2) ergeben also im Durchschnitt dieselben Kosten, nämlich 160 DM. Geht man dagegen nach Option 3) vor und akzeptiert eine Lieferung, so läßt man durchschnittlich 160 - 3,2 = 156,8 defekte Teile zur Produktion zu, in diesem Fall betragen die Kosten pro Lieferung 10 DM + 156,80 DM = 166,80 DM. Weist man aber bei Option 3) eine Lieferung zurück, so betragen die Kosten 170 DM. Daher ist die Option 3) insgesamt teurer, und die Firma sollte zwischen den Optionen 1) und 2) wählen.

Viele Leute finden diese Argumentation ganz überzeugend. Die wahre Sachlage ist jedoch ganz anders. Bei Option 3) muß noch eine "Akzeptanzzahl" c gefunden werden, die in folgende Entscheidungsregel eingeht: "Treten in der gezogenen Stichprobe von 100 Teilen c defekte Teile oder weniger auf, so wird die Lieferung zurückgewiesen, andernfalls wird sie angenommen." Vernünftig wäre es, c so zu wählen, daß die durchschnittlich entstehenden Kosten je Lieferung minimal sind. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Verteilung der Qualität bei den Lieferungen

auch in Zukunft so bleibt, wie sie bisher war. Man muß also die durchschnittlichen Kosten zu gegebenem Wert von c numerisch berechnen. Für unsere Zwecke genügt es zu zeigen, daß mit Option 3) geringere durchschnittliche Kosten als 160 DM zu erreichen sind. Die erforderlichen Rechnungen sind unten ausgeführt. Dabei wurde zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von 3 oder weniger defekten Teilen in einer Stichprobe von 100 Stück aus einer Lieferung eine *Poisson*-Approximation benutzt.

① Qualität der Lieferungen Anteil defekter Teile in %	② Wahrscheinlichkeit der Lieferung	③ Wahrscheinlichkeit für 3 oder weniger defekte Teile von 100 Teile	④ ②x③	⑤ Verlust in Abhängigkeit von durchgelassenen defekten Teilen 49 x ① x ④
1	0,15	0,981	0,1472	7,21 DM
2	0,20	0,857	0,1714	16,80 DM
3	0,25	0,647	0,1618	23,79 DM
4	0,20	0,433	0,0866	16,97 DM
5	0,10	0,265	0,0265	6,49 DM
6	0,10	0,151	0,0151	4,44 DM
		Summe:	0,6086	75,70 DM

Tabelle 1.1

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lieferung zurückgewiesen wird, beträgt demnach 1 - 0,6086 = 0,3914. Der Durchschnittswert sämtlicher Kosten je Lieferung ist demnach

10 DM + 75,70 DM + 0,3914 · 160 DM = 148,30 DM.

Er liegt unter 160 DM. Also sollte man Option 3) wählen. Führt man diese Rechnungen für mehrere Werte von c durch (statt nur für c = 3), so erhält man die geringsten Kosten bei dieser Option.

Warteschlangen: ein Projekt

Das Schlangestehen zu irgendeinem Zweck ist ein alltäglicher Vorgang, und es gibt eine Unmenge von Literatur zur Theorie der Warteschlangen. Die Leute stehen Schlange in Banken, Postämtern und Supermärkten, Autos warten in einer Schlange vor der Ampel, Flugzeuge kreisen vor der Landung in der Luft oder warten auf der Piste auf den Start, das sind nur einige der vielen Situationen, bei denen Warteschlangen auftreten. Im allgemeinen werden praktische Warteschlangen-Probleme - trotz der vielen mathematischen Literatur dazu - mit Hilfe von Simulationen untersucht.

Man betrachte eine einfache Warteschlange, bei der die Kunden einzeln kommen und, wenn nötig, warten. Die Bedienung steht ständig zur Verfügung, und die Kunden werden in der Reihenfolge ihres Ankommens bedient. Man führe eine Simulation aus, bei der der Zeitabstand zweier aufeinanderfolgender Kunden einen von zwei möglichen Werten t_1 und t_2 annimmt, deren Mittelwert 100 s beträgt. Hat man zur Simulation der Ankunftszeiten keinen Zufallsgenerator zur Verfügung, so mag man den einfachen Fall $p(t_1) = p(t_2) = 0,5$ annehmen, so daß man eine Münze benutzen kann. Ebenso nehme die Bedienungszeit unabhängig von den Zeitabständen bei der Ankunft einen von zwei möglichen Werten s_1 und s_2 an, deren Mittelwert 90 s beträgt. Man betrachte nun die Entwicklung der Warteschlange, wenn die Differenzen $t_2 - t_1$ der Zeitabstände beim Eintreffen und $s_2 - s_1$ der Bedienungszeiten wachsen, während die Mittelwerte 100 s bzw. 90 s bleiben. Man wiederhole den Versuch mit einer schnelleren (oder langsameren) Bedienung mit einer Bedienungszeit von 80 s (95 s). Hier sind viele Variationen möglich. Einige der wesentlichen Daten dieses Warteschlangen-Problems sind die Zahl der Kunden, die Wartezeit eines Kunden und der Zeitanteil, zu dem die Bedienung arbeitet.

Wir betrachten nun den Fall, bei dem die Zeitabstände für das Eintreffen der Kunden im Mittel 100 s betragen, und die mittlere

Bedienungszeit 90 s beträgt. Da mag folgende Vermutung vernünftig erscheinen: Da die Bedienungszeit im Durchschnitt kürzer ist als der mittlere Zeitabstand für das Eintreffen der Kunden, werden die Kunden bei diesem Service keinen Aufenthalt haben. Außerdem wird die Bedienung 10 % ihrer Zeit frei haben. Dieses Projekt, das wahrscheinlich am besten mit einer Gruppe von Schülern ausgeführt wird oder, falls möglich, auf einem Computer (nach einer kurzen Simulation von Hand), wird zeigen, daß man mit derartigen Intuitionen "voll daneben liegen" kann. Tabelle 2 zeigt die mittlere Wartezeit für einen Kunden. Dabei wurde in allen Fällen das Eintreffen von 500 Kunden mit einem Computer simuliert. Man beachte, daß der mittlere Zeitabstand für das Eintreffen in allen Fällen 100 s beträgt, bei den Bedienungszeiten dagegen zwei Mittelwerte, 90 s und 95 s, auftreten.

t_1	t_2	s_1	s_2	mittlere Wartezeit
80	120	70	110	30,2
60	140	50	130	112,8
40	160	30	150	221,3
80	120	75	115	56,4
60	140	55	135	184,9
40	160	35	155	338,3

Tabelle 2: Mittlere Wartezeiten für einen Kunden (Alle Zeiten in Sekunden)

Das verschwundene Volumen: ein Experiment

Wir nehmen eine Tasche voll kleiner Murmeln mit Durchmessern um 1,5 cm und messen die Durchmesser von 20 Murmeln. Dann berechnen wir den mittleren Durchmesser d dieser 20 Murmeln und behaupten daher, daß ihr Gesamtvolumen $20 \pi d^3/6$ beträgt. Mann kann zeigen, daß die Vorhersage ganz gut ist, indem man die 20 Murmeln in

einen mit Wasser gefüllten Meßzylinder eintaucht. Das wiederholen wir nun auch mit 20 großen Murmeln, deren Durchmesser etwa 2,5 cm beträgt.
Nun berechnen wir den mittleren Durchmesser D aller 40 Murmeln und prüfen die Behauptung, daß ihr Gesamtvolumen $40\ \pi\ D^3/6$ beträgt. Die Ergebnisse erscheinen recht überraschend. Bei einem solchen Experiment traten folgende Ergebnisse auf:

Mittlerer Durchmesser von 20 kleinen Murmeln	1,646	cm
Vermutetes Volumen der 20 kleinen Murmeln	46,7	cm^3
Gemessenes Volumen der 20 kleinen Murmeln	46	cm^3
Mittlerer Durchmesser von 20 großen Murmeln	2,533	cm
Vermutetes Volumen der 20 großen Murmeln	170,3	cm^3
Gemessenes Volumen der 20 großen Murmeln	170	cm^3
Mittlerer Durchmesser aller 40 Murmeln	2,089	cm
Vermutetes Volumen aller 40 Murmeln	191	cm^3
Gemessenes Volumen aller 40 Murmeln	216	cm^3

Die Vermutung bei den 20 kleinen Murmeln scheint also in Ordnung zu sein, ebenso die für die 20 großen Murmeln. Bei den 40 gemischten Murmeln ist die Vermutung von 191 cm^3 allerdings zu klein gegenüber den gemessenen 216 cm^3. Wo ist das Volumen geblieben?

Verlieren mit einem Gewinnlos: ein Spiel

Hier sind zwei Spieler beteiligt, sagen wir *Peter* und *Paul*. Es gibt mehrere Variationen, und in einem Fall war ich selbst *Peter*, und 258 Schüler der sechsten Klasse spielten nacheinander als *Paul*. Das Spiel dauerte etwa 15 Minuten.

Peter: Das Spiel geht so, daß Du eine Münze wirfst, bis "Kopf" fällt. Wenn Du beim k-ten Wurf "Kopf" erhältst, zahlst Du an mich 2^k DM. Ich zahle Dir für jeden Wurf 5 DM. Ich hoffe, Du merkst, daß

ich recht großzügig bin, denn im Mittel wirst Du 2 Wurf haben, bis "Kopf" fällt. Und weil $2^2 = 4$ ist, solltest Du im Mittel 1 DM pro Wurf von mir gewinnen.

Paul: Also los!

Nun wurden 258 Spiele gespielt, und *Paul* erwartete einen Gewinn von 258 DM. Das Ergebnis war aber, daß *Paul* 1882 DM verlor. *Paul* war darüber ganz überrascht, und einige seiner Teile waren dazu motiviert, herauszufinden, was schiefgelaufen war.

Eine mathematische Erkenntnis

Falsches Mittelwertbilden, das ist die Antwort auf die überraschenden Ergebnisse in den oben beschriebenen Situationen. Mathematisch ausgedrückt: Gilt für zwei Zufallsgrößen X und Y die Gleichung $Y = f(X)$, wobei f eine Funktion ist, so können wir den Fehler damit erklären, daß die Gleichung

$$(1) \qquad \bar{Y} = f(\bar{X})$$

benutzt wurde, wobei $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ die Erwartungswerte sind. Gleichung (1) gilt genau dann, wenn f linear ist. Ist f aber nicht linear, so kann sie einen riesigen Fehler bewirken. Zum Beispiel benutzte *Peter* die intuitive Wirkung von (1) bei seiner Argumentation, daß *Paul* eine gute Chance hätte. Der tatsächliche mittlere Gewinn pro Spiel für *Peter* ist weit entfernt von 1 DM, er beträgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (\tfrac{1}{2})^k - 5,$$

und das ist unendlich. (Das Spiel ist im wesentlichen das St. Petersburg Paradoxon.)

Eine Taylor-Entwicklung von f läßt die möglichen Gefahren von Gleichung (1) erkennen und suggeriert in etwa die Entdeckung, zu der man die Schüler anleiten sollte. Angenommen, der Mittelwert von X ist μ. Dann entwickeln wir f wie folgt:

$$y = f(x) = f(\mu) + (x-\mu)f'(\mu) + \frac{(x-\mu)^2}{2}f''(\mu) + \text{Rest}$$

Nun bilden wir die Mittelwerte und erhalten:

$$\overline{Y} = f(\mu) + \frac{f''(\mu)}{2} \cdot \text{Var}(X) + \text{Rest}$$

So kann eine große Varianz von X also einen großen Fehler erzeugen, wenn man Gleichung (1) benutzt. Das erklärt die Ergebnisse bei dem Volumen der Murmeln, denn die Schwankung innerhalb der beiden Murmelsorten war klein. Schüler können den wahren Sachverhalt im Zusammenhang mit Gleichung (1) entdecken, ohne eine *Taylor*-Entwicklung zu benutzen, wenn man sie den Fehler bei wachsender Schwankung notieren läßt. Das kann man bei den Beispielen zu Warteschlangen und Murmelvolumen gut sehen. Aber es gibt natürlich auch viele andere Möglichkeiten. Ein Beispiel für ein lineares f, das die Schüler interessieren könnte, bilden Temperaturangaben in °C und in °F. Bei einer Übung könnte man die mittlere Temperatur in °F mit Hilfe der angegebenen Temperatur in °C finden lassen.

Bemerkungen

Mit großer Freude bedanke ich mich für die Hilfe von David Gill bei den Berechnungen, die durch eine Bewilligung von seiten des Schul-Mathematik-Projektes möglich wurde.