Numero deus impare gaudet
oder
CASANOVA versus JACQUIER und VERGIL

FRIEDRICH BARTH UND RUDOLF HALLER, MÜNCHEN

Zusammenfassung: *Wenn man natürliche Zahlen durch einen Prozess erzeugt, bei dem der Zufall wesentlich beteiligt ist, dann ist die nächstliegende Erwartung, dass dabei die Chancen für gerade und ungerade Zahlen gleich sind. Im Laufe der Geschichte wurden gerade und ungerade Zahlen immer wieder unterschiedlich bewertet; manchmal aus philosophischen, metaphysischen oder theologischen Gründen und manchmal sogar mit mathematischen Argumenten. Auch heutzutage ist es z. B. noch üblich, als Gast Blumen in ungerader Anzahl zu überreichen. Im Folgenden soll an historischen Beispielen mit mathematischen Mitteln ein Beitrag zur Entmythologisierung dieser Vorstellungen geleistet werden. Der mathematische Aufwand ist gering, das Problem selbst lädt aber zum Nachdenken ein und dient dazu, den Unterricht aufzulockern.*

Zugrunde liegt dem Ganzen letztlich eine Einteilung der natürlichen Zahlen in Restklassen modulo 2. Ein Gutachter regte eine Verallgemeinerung auf Restklassen modulo n *an, was jedoch den Rahmen dieses Artikels sprengt. Wir geben die Anregung aber gerne weiter.*

1 Von China über VERGIL zu LEIBNIZ

In China gelten ungerade Zahlen als *yang*, d. i. als himmlisch und Glück verheißend. Die vorpythagoreische Überzeugung, dass das Ungerade vollkommen, ruhend, fruchtbar und männlich, das Gerade hingegen bewegt, böse und weiblich sei, erklärt IOANNES STOBAIOS im 5. Jh. n. Chr. damit, dass das Ungerade durch Hinzufügen von Ungeradem das Gerade erzeugen kann, was umgekehrt nicht möglich ist. PLUTARCH (um 46 – um 125) zufolge soll man den himmlischen Göttern mit einer ungeraden Anzahl und den irdischen mit einer geraden opfern. VERGIL (70–19) verlieh all diesen Vorstellungen Ausdruck durch den im Titel zitierten Vers aus seinen 42–37 v. Chr. verfassten *Bucolica*. Dieser gelangte in den islamischen Kulturkreis als »Wahrlich, Gott ist eine ungrade Zahl, *witr* (nämlich Einer), und liebt die ungrade Zahl« (Endres & Schimmel 1984, S. 27). Nachdem GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) entdeckt hatte, dass der Flächeninhalt des Kreises, der dem Einheitsquadrat einbeschrieben werden kann, nämlich $\frac{\pi}{4}$, durch $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \pm \ldots$, also durch eine unendliche alternierende Reihe aller Stammbrüche mit ungeradem Nenner ausgedrückt werden kann, schrieb er VERGILs Vers *numero DEUS impare gaudet* in dieses Quadrat (Leibniz 1682).

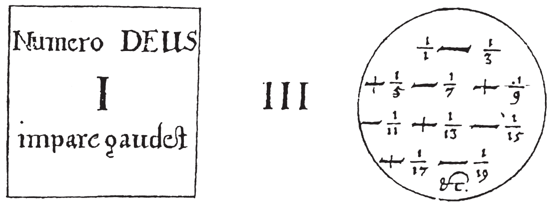
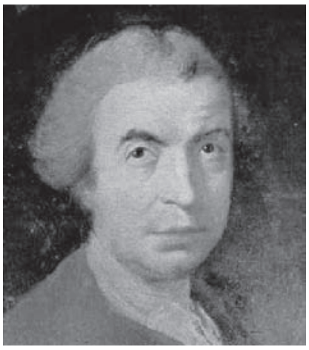


Abb. 1 LEIBNIZens Darstellung aus den *Acta Eruditorum*[1]

2 Woran nahm CASANOVA Anstoß?

1788
GIACOMO GIROLAMO CASANOVA (1725–1798), der sich (erstmals am 24.4.1760) Chevalier de Seingalt nannte. Zeichnung und Kupferstich von JOHANN BERKA (1758–1838)



1760
ROGER JOSEPH BOSCOVICH (1711–1787) Gemälde von ROBERT EDGE PINE (1730–1780)

Erhalten ist der Entwurf eines Briefes GIACOMO CASANOVAs, ohne Orts- und Datumsangabe und ohne Nennung des Adressaten. Geschrieben wurde er höchstwahrscheinlich im Frühjahr 1770 in Rom, Adressat ist vermutlich der dalmatinische Jesuit, Professor für Mathematik, Physik, Geographie, Astronomie und Ingenieur ROGER JOSEPH BOSCOVICH, auch RUGJER JOSIP BOŠKOVIĆ, ein im 18. Jh. berühmter Universalgelehrter. CASANOVA schreibt darin, der Minorit FRANÇOIS JACQUIER (Professor für Mathematik, Physik und Theologie an der päpstlichen Universität zu Rom) habe ihm gegenüber behauptet:

> »Beim zufälligen Wurf zweier Würfel, die auf jeder Seite eine der Zahlen Eins bis Sechs tragen, komme öfter eine ungerade Summe heraus als eine gerade. […] Dies sei eine von Monsieur de Mairan bewiesene Wahrheit. Er könne mir den Beweis nicht führen, weil dieser mein Verständnis bzw. meine Fassungsgabe übersteige.«

Casanova ist davon nicht überzeugt. Er bittet den Adressaten, »sein Beschützer und Advokat zu sein.« Hätte aber Jacquier recht, dann würde er jetzt »das verteufelte Axiom« *numero deus impare gaudet*[2] – Gott freut sich über ungerade Zahlen – verstehen.

3 Was ist de Mairans »bewiesene Wahrheit«?

1730 erschien unter dem Titel *Sur le Jeu du Pair ou Non* ein Aufsatz, der Jean Jacques d'Ortous de Mairan zugeschrieben wird und den Denis Diderot (1713–1784) und Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) fast wörtlich 1765 unter dem Stichwort »PAIR OU NON« in Band 11 der *Encyclopédie* nachdruckten. Er widmet sich dem Spiel »Gerade oder ungerade«, das seit urdenklichen Zeiten gespielt wurde. Darin liest man:

> »Nichts erscheint klarer und eindeutiger als das Spiel *Pair ou Non*, bei dem man erraten soll, ob die Anzahl von Jetons, die jemand aus einem Haufen von *n* Jetons genommen hat, gerade oder ungerade ist. Es scheint gleichgültig zu sein, welche Antwort man gibt, denn es gibt gleich viele gerade wie ungerade Zahlen, eine Begründung, die alle Welt für zwingend hält. Bei genauerem Hinsehen wird man finden, dass dem nicht so ist; denn Fragen über Wahrscheinlichkeit sind sehr heikel. Jean Jacques d'Ortous de Mairan hat herausgefunden, dass es vorteilhaft sei, immer mit Ungerade zu antworten, und man hat ihm später gesagt, gewiefte Spieler hätten dies schon längst gewusst.«

De Mairans Begründung ist falsch. 1774 löste Pierre Simon de Laplace (1749–1827) die Aufgabe als Problem V viel zu kompliziert (Laplace 1774) und wiederholte 1776 diesen Lösungsweg (Laplace 1776). Vielleicht wurde der Genfer Mathematiker Louis Bertrand (1731–1812) durch diese Arbeiten zu seiner leichter verständlichen Lösung angeregt, die er 1786 an die Akademie der Wissenschaften zu Paris sandte, die aber nicht gedruckt wurde (Bertrand 1786).[3] Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet (1743–1794), damals *Secrétaire perpétuel* der Akademie, bringt unter Verweis auf Bertrand dessen Lösung in seinen *Élémens du calcul des probabilités* (Condorcet 1805, Seite 150 f.)[4]:

Bertrand setzt voraus, dass jede nicht-leere Teilmenge aus dem Haufen von *n* Jetons mit gleicher Wahrscheinlichkeit entnommen werden kann. Sei G = »Anzahl der entnommenen Jetons ist gerade« und U = »Anzahl der entnommenen Jetons ist ungerade«, dann ist offenbar $\Omega = G \cup U$, und es gilt

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - 1 = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$$

$$= |G| + |U|.$$

Ferner ist

$$|G| - |U| = -\binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} - 1$$

$$= (1-1)^n - 1 = -1.$$

Die ungeraden Zahlen sind um 1 mehr als die geraden, was kein Wunder ist: Die leere Menge fehlt, und 0 ist eine gerade Zahl!

Addition von $|G| + |U| = 2^n - 1$ und $|G| - |U| = -1$ liefert $2 \cdot |G| = 2^n - 2$, also $|G| = 2^{n-1} - 1$, und damit $|U| = 2^{n-1}$.

Es ist also immer $P(U) > P(G)$, sodass derjenige, der auf »Ungerade« setzt, immer im Vorteil ist, auch wenn *n* gerade ist! Vergil und die Alten haben in diesem Fall recht!

4 Jacquier und de Mairan – zwei verschiedene Experimente!

Jean-Jacques d'Ortous de Mairan (1678–1771) Kupferstich von Simon Charles Miger (1736–1820) nach Charles-Nicolas Cochin (1715–1790)

um 1740 François Jacquier (1711–1788) Federzeichnung von Pier Leone Ghezzi (1674–1755)

Jacquier hat de Mairans Ergebnis auf ein anderes Zufallsexperiment falsch übertragen. Auch für Mathematiker ist es offenbar nicht leicht, das richtige Zufallsexperiment zu finden. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als handle es sich um das gleiche Problem, nämlich willkürlich eine natürliche Zahl aus einer festen Menge von natürlichen Zahlen auszuwählen. Betrachtet man aber die beiden Fragestellungen genauer, dann sieht man sofort, dass zwei gänzlich verschiedene Sachverhalte, also zwei verschiedene Zufallsexperimente vorliegen. Man sollte sich also nicht wundern, dass unterschiedliche Ergebnisse auftreten.

Zieht man z. B. eine 2-Menge aus einer 17-Menge, dann gibt es $\binom{17}{2} = 136$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, beim Problem von DE MAIRAN eine 2-Menge aus einer 17-Menge zu ziehen, ist damit $\frac{136}{2^{17}-1}$, weil es 2^{17} Teilmengen gibt, die leere Menge aber nicht in Betracht gezogen wird. Für eine 1-Menge gibt es 17 Möglichkeiten.

Beim Würfeln mit zwei Würfeln kann die Zahl 2 als Augensumme hingegen nur auf *eine* Art erzeugt werden, nämlich als $1 + 1$. Ihre Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{36}$. Die Zahl 1 kann überhaupt nicht als Augensumme auftreten!

5 Wie geht CASANOVA das Problem an?

CASANOVA, der als bekannter Spieler eine reiche Erfahrung hat, führt im oben erwähnten Brief an BOSCOVICH aus,

> »dass es in der Mathematik keine Wahrheit gibt, die der Erfahrung widersprechen darf, wenn diese Erfahrung das Gegenteil beweist. […] Ich nehme mir die Freiheit, ihm [JACQUIER] zu sagen, dass die Summe eines beliebigen Wurfes zweier Würfel sechsunddreißig verschiedene Ergebnisse zeigen kann, und weil nie mehr als zwei Flächen der Würfel erscheinen können und alle diese Flächen gleich sind, ergeben sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit achtzehn Würfe mit gerader Summe und achtzehn Würfe mit ungerader; somit ist bewiesen, dass es keine größere Wahrscheinlichkeit für ungerade gibt als für gerade, und auch nicht umgekehrt.«

CASANOVA hat also alle Wurfergebnisse notiert und die jeweilige Augensumme gebildet. In seinem Nachlass fand man eine lange, leider auch undatierte, auf Italienisch verfasste Abhandlung zum Problem der Würfelsummen. Er fährt in seinem Brief dann fort:

> »Lassen Sie mich zwei gute Würfel nehmen und sie hundertmal […] werfen und notieren, wie viele der Würfe ungerade und wie viele gerade Summen ergeben; und diesen Versuch will ich zehnmal wiederholen. Ich gebe zu, dass das nicht unbedingt schlüssig ist, aber wenn die Überlegung von Monsieur de Mairan richtig ist, glaube ich, dass man annehmen darf, ein Ergebnis zu sehen.«

Das Experiment CASANOVAs lässt sich (z. B. durch Gruppenarbeit) leicht nachvollziehen. Wir warfen zwei Würfel 100-mal und erhielten 46 gerade und 54 ungerade Augensummen.

Ergänzung: Einfacher als durch Abzählen erhält man die Richtigkeit von CASANOVAs Behauptung so:

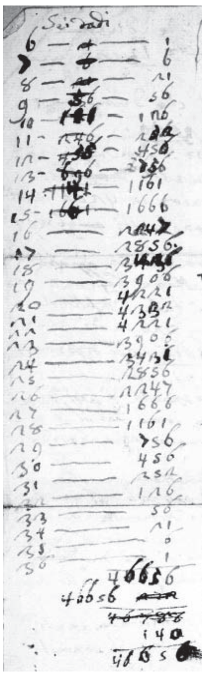
1. Methode: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist genau dann ungerade, wenn genau eine dieser Zahlen ungerade ist. Für Summanden aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erhält man: $u + g$ liefert $3 \cdot 3 = 9$ Fälle, ebenso $g + u$. Also hat man 18 ungerade Augensummen und daher 18 gerade Augensummen. CASANOVA hat recht.

2. Methode: Mit a = Augenzahl von Würfel A und b = Augenzahl von Würfel B gilt

$$P(a + b \text{ ist ungerade})$$
$$= P([a \text{ unger.} \cap b \text{ ger.}] \cup [a \text{ ger.} \cap b \text{ unger.}])$$
$$\overset{\text{unvereinbar}}{=} P(a \text{ unger.} \cap b \text{ ger.}) + P(a \text{ ger.} \cap b \text{ unger.})$$
$$\overset{\text{unabhängig}}{=} P(a \text{ unger.}) \cdot P(b \text{ ger.}) + P(a \text{ ger.}) \cdot P(b \text{ unger.})$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

6 CASANOVA denkt weiter und liefert so einen Anstoß

In seiner italienischen Abhandlung untersucht CASANOVA ausführlich auch die Augensummen bei sechs Würfeln. Er muss dabei $6^6 = 46656$ Ausfälle betrachten!



a		$N(a)$
6	36	1
7	35	6
8	34	21
9	33	56
10	32	126
11	31	252
12	30	456
13	29	756
14	28	1161
15	27	1666
16	26	2247
17	25	2856
18	24	3431
19	23	3906
20	22	4221
21		4332

Abb. 2: CASANOVAs Tabelle der Augensummen, rechts unsere Umschrift

Es ist nicht vorstellbar, dass CASANOVA all diese 46656 Zahlen hingeschrieben hat. Leider geht aus dem Manuskript nicht hervor, wie er zu den Anzahlen für die einzelnen Augensummen gekommen ist. Er benützt aber die Tatsache, dass die Augensummen a und $42 - a$ gleich oft auftreten, dass es also genügt, die absoluten Häufigkeiten der Augensummen von 6 bis 21 zu ermitteln. Ob CASANOVA, der ja mathematisch belesen war, die Formel von PIERRE RÉMOND DE MONTMORT aus dem Jahre 1713 (Proposition XIV) oder die von ABRAHAM DE MOIVRE aus dem Jahre 1712 (*De Mensura Sortis*, Seite 220, bewiesen erst 1730 in den *Miscellanea Analytica*, Seite 191 ff.) benützt hat, wissen wir nicht. Die Berechnung ist auch mit dieser Formel mühsam, was vielleicht die Korrekturen erklärt, die CASANOVA in seinem Manuskript vorgenommen hat.

In heutiger Schreibweise sieht diese Formel etwas manierlicher aus als zu Anfang des 18. Jh.s. Es gilt also:

Wirft man w Würfel mit je f Flächen, so entsteht die Augensumme a auf

$$N(a, w, f) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{a-w}{f}\right]} (-1)^i \binom{w}{i} \binom{a - if - 1}{w - 1}$$

Arten. Auf den nicht leichten Beweis verzichten wir im Zusammenhang mit unserem Problem. Für CASANOVAs Berechnungen lautet der Ausdruck

$$N(a) = N(a, 6, 6) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{a-6}{6}\right]} (-1)^i \binom{6}{i} \binom{a - 6i - 1}{5}.$$

CASANOVA berechnet in seinem Manuskript die Einsätze, die derjenige leisten muss, der auf das Nichterscheinen einer dieser Summen setzt. Offenbar widmet er sich nicht mehr der Frage, ob es gleich viele gerade und ungerade Augensummen gibt. Wir stellen fest, es gibt gleich viele; denn es ist

$(1 + 21 + 126 + 456 + 1161 + 2247 + 3431 + 4221) \cdot 2 = 23328,$

und ebenso

$(6 + 56 + 252 + 756 + 1666 + 2856 + 3906) \cdot 2 + 4332 = 23328.$

CASANOVA hat uns aber zu einer Verallgemeinerung des Problems der Augensummen angeregt. In beiden Fällen waren sowohl die Anzahl der geworfenen Würfel wie auch die Anzahl der Würfelflächen gerade. Was wird sich wohl ergeben, wenn eine dieser oder gar beide Anzahlen ungerade sind? Wir behaupten:

Satz: Es werden n L-Würfel geworfen, deren f Flächen die Augenzahlen 1, 2, … f tragen. Für die Augensumme s_n des Wurfs gilt:

1) Ist ***f* gerade**, dann ist

$$P(s_n \text{ ungerade}) = P(s_n \text{ gerade}) = \frac{1}{2},$$

d. h., es gibt genauso viele gerade wie ungerade Augensummen.

2) Ist ***f* ungerade**, dann ist

$$P(s_n \text{ ungerade}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{f^n}\right)$$

und

$$P(s_n \text{ gerade}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{f^n}\right),$$

d. h., bei geradem n gibt es mehr gerade Augensummen als ungerade, und bei ungeradem n gibt es mehr ungerade Augensummen als gerade. ■

Zur Realisierung kann man z. B. eine Urne mit f Zetteln füllen, die von 1 bis f nummeriert sind. Man zieht n-mal mit Zurücklegen und bestimmt die Summe der gezogenen Nummern.

Beweis:

Zunächst überlegen wir für zwei Würfel:

1) Ist f gerade, dann lässt sich die obige Überlegung nach der 2. Methode problemlos übertragen, und es ist für zwei Würfel

$$P(s_2 \text{ ungerade}) = P(s_2 \text{ gerade}) = \frac{1}{2}.$$

Dies sei die Induktionsvoraussetzung für einen Induktionsbeweis nach n.

Es gelte nun $P(s_n \text{ ist ungerade}) = \frac{1}{2}$. Wegen Unvereinbarkeit und Unabhängigkeit erhält man, wenn a_{n+1} die Augenzahl des $(n + 1)$-ten Würfels ist:

$$\begin{aligned}
&P(s_{n+1} \text{ ist ungerade}) \\
&= P([s_n \text{ unger.} \cap a_{n+1} \text{ ger.}] \cup [s_n \text{ ger.} \cap a_{n+1} \text{ unger.}]) \\
&= P(s_n \text{ ungerade}) \cdot P(a_{n+1} \text{ gerade}) \\
&\quad + P(s_n \text{ gerade}) \cdot P(a_{n+1} \text{ ungerade}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ q. e. d.}
\end{aligned}$$

2) Ist f ungerade, dann gibt es $\frac{f+1}{2}$ Flächen mit ungeraden Augenzahlen und $\frac{f-1}{2}$ Flächen mit geraden

Augenzahlen. Für s_2 erhält man wie oben wegen Unvereinbarkeit und Unabhängigkeit

$P(s_2 \text{ ungerade})$

$= P(a_1 \text{ unger.}) \cdot P(a_2 \text{ ger.}) + P(a_1 \text{ ger.}) \cdot P(a_2 \text{ unger.})$

$= 2 \cdot \frac{f+1}{2f} \cdot \frac{f-1}{2f} = \frac{f^2-1}{2f^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{f^2}\right)$

und somit für $P(s_2 \text{ gerade}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{f^2}\right)$.

Damit ist die Behauptung richtig für $n = 2$, was wir als Induktionsvoraussetzung nehmen. Es gelte nun $P(s_n \text{ ist ungerade}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{f^n}\right)$. Dann erhält man wie oben

$P(s_{n+1} \text{ ist ungerade})$

$= P(s_n \text{ ungerade}) \cdot P(a_{n+1} \text{ gerade})$

$\quad + P(s_n \text{ gerade}) \cdot P(a_{n+1} \text{ ungerade})$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{f^n}\right) \cdot \frac{f-1}{2f}$

$\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{f^n}\right) \cdot \frac{f+1}{2f}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{f-1}{2f} + \frac{f+1}{2f}\right)$

$\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}(f-1) - (-1)^{n+1}(f+1)}{2f^{n+1}}$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(-1)^{n+2}}{f^{n+1}}\right)$.

Damit ergibt sich noch

$P(s_{n+1} \text{ ist gerade})$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(-1)^{n+2}}{f^{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-1)^{n+2}}{f^{n+1}}\right)$, q. e. d.

Insgesamt gesehen sind also weder gerade noch ungerade Augensummen bevorzugt. Gott freut sich offenbar über jede Zahl – *numero deus omni gaudet.*

Anmerkungen

1 Die römische III in der Mitte gibt an, dass es sich um die 3. Abbildung des Artikels handelt. Die römische I im Quadrat hingegen ist dessen Flächeninhalt, so wie die Reihe im Kreis den Flächeninhalt des Kreises wiedergibt.

2 So steht es bei Vergil, der aus metrischen Gründen *impare* schrieb. Casanova aber schreibt *Impari numero Deus gaudet* und verwendet damit den korrekten Ablativ *impari*. Er habe diesen Spruch zum ersten Mal als Zwölfjähriger (!) gehört, und zwar von Marchese Giovanni Poleni (1685–1761), der seit 1719 Professor für Mathematik an der Universität Padua war und bei dem Casanova vielleicht auch Vorlesungen hörte. – Casanova war nämlich kein schlechter Mathematiker. So berechnete er u. a. die Wahrscheinlichkeiten für *ambi*, *terni* und *quaterni* bei der von ihm mitbegründeten französischen Lotterie und veröffentlichte 1790 in Dresden eine *Solution du Probleme deliaque*, also eine Lösung des Delischen Problems der Würfelverdoppelung.

3 Wir haben nicht nachgefragt, ob das Manuskript dort noch vorhanden ist.

4 Ebenso verfährt sein Schüler Sylvestre-François Lacroix 1816 (Lacroix 1816). Auch Laplace bringt 1812 Bertrands Lösung, verschweigt aber dessen Urheberschaft (Laplace 1812, Seite 201).

Literatur

Bertrand, L. (1786): Mémoire sur une question du Calcul des Probabilités – nicht gedruckt.

Casanova, G. (1770): Brief an Roger Joseph Boscovich (?) In: *Casanova, Giacomo: Gesammelte Briefe. Ausgewählt, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Enrico Straub. Neu und zum Teil erstmals nach den französischen und italienischen Manuskripten übersetzt von Heinz von Sauter.* Hier Band II: Aus der gelehrten Korrespondenz. S. 72–76. Berlin: Propyläen Verlag, 1970.

Casanova, G. (s. a.): Unbetitelte Abhandlung in italienischer Sprache. Státní oblastní archiv v Praze (Archives d'État du Prague), fond Casanova, U 16h–44.

Condorcet, J. (1805): Élémens du calcul des probabilités, et son application aux jeux de hasard, à la loterie, et aux jugemens des hommes. Royez, Paris An XIII (1805) – Nachdruck: Paris: IREM (Institut de Recherches en Enseignement des Mathématiques), 1986.

De Mairan [anonym] (1730): Sur le Jeu du Pair ou Non. In: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1728), S. 53–57, Paris.

De Moivre, A. (1712): De Mensura Sortis seu; de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus. In: *Philosophical Transactions* 27 (Nr. 329) für die Monate Januar, Februar und März 1711. London.

De Moivre, A. (1730): Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis. London: J. Tonson & J. Watts.

Endres, F. C.; Schimmel, A. (1984): Das Mysterium der Zahl. Zahlensymbolik im Kulturvergleich. Köln: Diederichs.

Lacroix, S.-F. (1816): Traité élémentaire du Calcul des probabilités. Paris: Bachelier. – Deutsche Übersetzung von Ephraim Samuel Unger: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erfurt: G. A. Keysers Buchhandlung, 1818.

Laplace, P. S. de (1774): Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards (vorgelegt 5.2.1772). In: *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1772), Band VI, S. 353–371.

Laplace, P. S. de (1776): Recherches sur l'integration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards (vorgelegt 10.3.1773). In: *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1773), Band VII, S. 37–232.

Laplace, P. S. de (1812): Théorie Analytique des Probabilités. Paris: Mme Ve Courcier.

Leibniz, G. W. (1682): De vera proportione circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus expressa. In: *Acta Eruditorum*. Leipzig: Grosse & Gleditsch.

Montmort, P. R. de (1713) [anonym]: Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard. Seconde Edition. Revûe et augmentée des plusieurs Lettres. Paris: Jacque Quillau.

Stobaios, I. (5 Jh. n. Chr.): Eclogae physicae et ethicae. Hier: I, 1, 10. – Siehe z. B.: Ioannis Stobaei Eclogarvm Physicarvm Et Ethicarvm Libri Dvo, [griechisch, lateinisch] hg. von Arnold H. L. Heeren. Göttingen: Vandenhoek et Ruprecht, 1792–1802.

Vergilius Maro, P. (42–37 v. Chr.) Eclogae = Bucolica, hier: VIII, 75. – Siehe z. B.: P. Vergili Maronis Eclogae, hg. von H. E. Gould, New York: Macmillan. 1967.

Anschriften der Verfasser

Friedrich Barth
Abbachstraße 23
80992 München
e.f.barth@t-online.de

Rudolf Haller
Nederlinger Straße 32a
80638 München
rudolf.haller@arcor.de